ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ НАГРЕВОМ ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ

Мартыненко М.С.
Научный руководитель – канд. техн. наук, доц. Гибкина Н.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Науки, 14, каф. Прикладной математики,
тел.(057)702-14-36, e-mail: mykhailo.martynenko@nure.ua)

One of the possible statements of problems of optimal control of homogeneous plate heating is presented in the article. Control of the temperature inside the plate is set up by setting such temperature conditions on its borders, which at the final moment of the time would set the temperature inside the plate as close as possible to the specified temperature distribution.

Задачи теплопереноса позволяют описывать процесс распространения тепла в заданной области пространства во времени. Эти задачи находят применение в ведущих направлениях техники (химическая технология, металлургия, нефтеразработка и т.д.), естественных науках (геология, физика). На практике часто возникает необходимость оптимального, то есть наилучшего в каком-то определенном смысле, управления сложными системами, состояние которых характеризуется одним или несколькими параметрами, распределенными в пространстве. Поэтому оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями математической физики, представляет собой перспективное направление исследований.

Процесс теплопереноса в двумерном случае описывается параболическим уравнением [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\quad \forall\, 0<x<a,\quad 0<y<b,\quad t>0, \tag{1}$$

с краевыми и начальным условиями

$$u|_{y=0}=\mu_1(x,t),\ u|_{x=0}=\nu_1(y,t),\ u|_{y=b}=\mu_2(x,t),\ u|_{x=a}=\nu_2(y,t),\ u|_{t=0}=\varphi(x,y). \tag{2}$$

Решением задачи (1), (2) является функция $u(x,y,t)$, определяющая температуру в момент времени t в точке с координатами (x,y). Это решение можно получить методом Фурье с предварительной заменой исходной функции выражением вида $u(x,y,t)=v(x,y,t)+w(x,y,t)$, где $w(x,y,t)=\dfrac{\mu_1(x,t)(b-y)(a-x)}{y+(b-y)(a-x)x}$, а $v(x,y,t)$ – новая неизвестная функция.

Рассмотрим одну из возможных постановок задач оптимального управления процессом нагрева однородной пластины с целью установления в ней наилучшего в определенном смысле температурного режима в конечный момент времени: необходимо так определить функции $\mu_1(x,t)$, $\mu_2(x,t)$, $\nu_1(y,t)$, $\nu_2(y,t)$, $\varphi(x,y)$, чтобы распределение температуры $u(x,y,T)$, полученное из решения задачи (1), (2), при $t=T$ было сколь угодно близким к заданному распределению температуры $z(x,y)$. Для определенности будем считать, что краевые и начальные условия (2) имеют вид:

$$u|_{y=0} = \mu_1(x,t)\,,\quad u|_{x=0} = 0\,,\quad u|_{y=b} = 0\,,\quad u|_{x=a} = 0\,,\quad u|_{t=0} = 0\,. \qquad (3)$$

Такая постановка соответствует случаю, когда нагрев пластины осуществляется только за счет нагрева ее нижней грани по закону, задаваемого выражением $\mu_1(x,t)$. Неизвестную функцию $\mu_1(x,t)$ будем искать в виде отрезка двойного ряда Фурье:

$$\mu_1(x,t) = \sum_{i+j=0}^{L}\left(q_{ij}^{(1)} \cos\frac{\pi ix}{a}\cos\frac{\pi jt}{T} + q_{ij}^{(2)} \sin\frac{\pi ix}{a}\cos\frac{\pi jt}{T} + q_{ij}^{(3)} \cos\frac{\pi ix}{a}\sin\frac{\pi jt}{T} + q_{ij}^{(4)} \sin\frac{\pi ix}{a}\sin\frac{\pi jt}{T}\right).$$

Кроме этого, функция $\mu_1(x,t)$ должна удовлетворять условиям:

$$\mu_1(0,t) = 0\,,\quad \mu_1(a,t) = 0\,,\quad \mu_1(x,0) = 0 \text{ почти всюду на } [0,a]\,.$$

Функционал, позволяющий оценить отклонение фактического распределения температуры в пластине в конечный момент времени от желаемого распределения температуры, имеет вид:

$$J(\mu_1) = \left\| u(x,y,T;\mu_1) - z(x,y)\right\|^2_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega}\big(u(x,y,T;\mu_1) - z(x,y)\big)^2\,dxdy\,.$$

Минимизируя это выражение по переменным $q_{ij}^{(k)}$, $i+j=\overline{0,L}$, $k=\overline{1,4}$, найдем такие значения этих параметров, которые обеспечивают оптимальное протекание процесса нагрева.

Графики оптимального управляющего воздействия $\mu_1(x,t)$, позволяющего вывести температуру в пластине в конечный момент времени $T=1$ на режим $z(x,y) = xy(1-x)(1-y)$ для случаев $L=1$, $L=2$, приведены на рисунках 1 и 2.

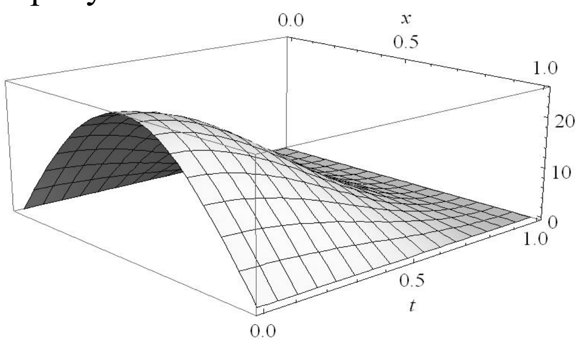

Рис 1. График функции оптимального управления $\mu_1(x,t)$ при $L=1$

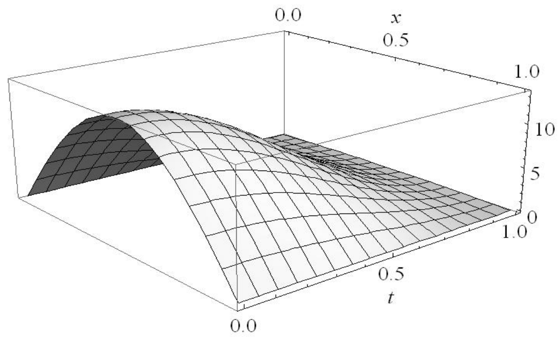

Рис 2. График функции оптимального управления $\mu_1(x,t)$ при $L=2$

1. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.–368 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XII).

2. Гибкина Н.В., Мартыненко М.С., Сидоров М.В., Об одной задаче оптимального управления нагревом однородной пластины //Радиоэлектроника и информатика, № 2.– 2015. – С. 10-16.