УДК 621.317

ПОГРЕШНОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АПЕРИОДИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

к.т.н. И.П. Захаров, М.П. Сергиенко
(представил д.т.н., проф. И.В. Руженцев)

Рассмотрен вопрос выбора оптимальных параметров моделей переходных характеристик апериодических средств измерительной техники по критерию минимума максимального отклонения с целью достижения наибольшей точности при минимизации их порядка.

Введение. Апериодические средства измерительной техники (СИТ) получили широкое распространение в технике и научных исследованиях. Необходимым является их метрологическое обеспечение, включающее в себя идентификацию динамических характеристик. Для апериодических СИТ наиболее удобной для использования и нормирования является переходная характеристика (ПХ) [1].

Одним из этапов идентификации ПХ СИТ является выбор математической модели, с помощью которой ПХ могут быть описаны с заданным уровнем точности. При этом актуальной является задача минимизации порядка модели. Выбор для аппроксимации ПХ функций высокого порядка (с использованием более трех экспонент) нецелесообразен, поскольку при этом обработка результатов измерительного эксперимента весьма затруднительна и зачастую не дает адекватного результата либо затраты на нее не оправдывают получаемой в результате точности идентификации [2].

Целью работы является исследование возможности получения минимальной погрешности аппроксимации при минимальном порядке аппроксимирующей функции.

В качестве критериев оптимальности аппроксимации могут быть использованы следующие выражения

$$f(t,\tau_m,\tau^*_{k\,var}) = \frac{1}{T}\sum_j \left|\Delta h_j\right| = \min\,; \tag{1}$$

$$f(t,\tau_m,\tau^*_{k\,var}) = \frac{1}{T}\sum_j \Delta h_j^2 = \min\,, \tag{2}$$

где τ_m, $\tau^*_{k\,var}$ – постоянные времени исследуемой ПХ и изменяемые постоянные времени модели, аппроксимирующей исследуемую ПХ ($k \le m$);

T – время измерения ПХ;

$\Delta h_j = h(t_j) - h^*(t_j)$, где t_j – узлы, в которых оценивается качество аппроксимации; $h(t_j)$ и $h^*(t_j)$ – экспериментальная и аппроксимирующая нормированные ПХ соответственно.

Недостатком этих критериев является зависимость результата аппроксимации от времени измерения ПХ.

Свободным от этого недостатка является критерий, минимизирующий максимальное отклонение ПХ путем перебора значений параметров модели

$$\max_{\tau^*_{k\,var}} |\Delta h_j| = \min . \qquad (3)$$

Рассмотрим случаи, когда аппроксимируемыми являются ПХ второго порядка, а аппроксимирующим выступает апериодическое звено первого порядка с передаточной функцией

$$H^*(s) = \frac{1}{\tau^* s + 1}$$

и ПХ

$$h^*(t) = 1 - \exp\left(\frac{t}{\tau^*}\right), \qquad (4)$$

и апериодическое звено второго порядка с передаточной функцией

$$H^*(s) = \frac{1}{(\tau^* s + 1)^2}$$

и ПХ

$$h^*(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{\tau^*}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau^*}\right). \qquad (5)$$

Выбор для аппроксимации ПХ различных порядков звена первого порядка (4) обусловлен простотой идентификации его характеристик.

Преимуществом выбора в качестве аппроксимирующей ПХ (5) является более высокий порядок при наличии одной постоянной времени, что позволяет найти минимально возможную погрешность и соответствующие ей параметры в аналитическом виде.

Моделирование звеном первого порядка

Рассмотрим аппроксимацию ПХ СИТ, описываемых апериодическими звеньями второго порядка выражением (4).

Для звена с передаточной функцией

$$H(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)^2}$$

и ПХ

$$h(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{\tau_1}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \qquad (6)$$

методом математического моделирования в соответствии с критерием (3) была получена зависимость между постоянными времени τ^* и τ_1, которая является линейной и может быть аппроксимирована выражением

$$\tau^* = 2{,}40657\,\tau_1 .$$

Относительная погрешность аппроксимации определяется выражением

$$\delta_{\text{аппр}} = \frac{\tau^*_{\text{аппр}} - \tau^*}{\tau^*} \cdot 100\,\% ,$$

где $\tau^*_{\text{аппр}}$ – аппроксимация полученной расчетным путем зависимости постоянной времени моделирующего звена от параметров моделируемого.

В данном случае погрешность аппроксимации лежит в пределах от $-2{,}3 \cdot 10^{-7}\,\%$ до $4{,}7 \cdot 10^{-7}\,\%$.

Погрешность моделирования ПХ в этом случае постоянна и равна

$$\min\max\left|\Delta h\right| = 9{,}88075 \cdot 10^{-2} .$$

Для апериодического звена с передаточной функцией

$$H(s) = \frac{\tau_3 s + 1}{(\tau_1 s + 1)^2}$$

и ПХ

$$h(t) = 1 - \left(1 + \left(1 - \frac{\tau_3}{\tau_1}\right)\frac{t}{\tau_1}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \qquad (7)$$

общее аппроксимирующее выражение имеет вид

$$\tau^* = -\tau_1\big(0{,}5581 - 2{,}9639\exp(-0{,}6431\,\tau_3/\tau_1)\big).$$

Относительная погрешность аппроксимации в этом случае лежит в пределах от $-2{,}98 \cdot 10^{-2}\,\%$ до $1{,}68 \cdot 10^{-2}\,\%$.

Погрешность моделирования показана на рис. 1. Ее значение не превышает 0,1.

Рассмотрим моделирование звеном с ПХ (4) апериодического звена с передаточной функцией

$$H(s) = \frac{\tau_3 s + 1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

и ПХ

$$h(t) = 1 - \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_1 - \tau_2}\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) - \frac{\tau_2 - \tau_3}{\tau_2 - \tau_1}\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right). \qquad (8)$$

Здесь должно выполняться условие $\tau_{2,3} \le \tau_1$.

В частном случае, когда $\tau_3 = 0$, аппроксимирующее выражение для τ^* имеет вид

$$\tau^* = \tau_1\left(1{,}0009 + 1{,}3937\left(\tau_2/\tau_1\right)^{0{,}8071}\right),$$

погрешность такой аппроксимации лежит в пределах от $-0{,}59\%$ до $0{,}38\%$.

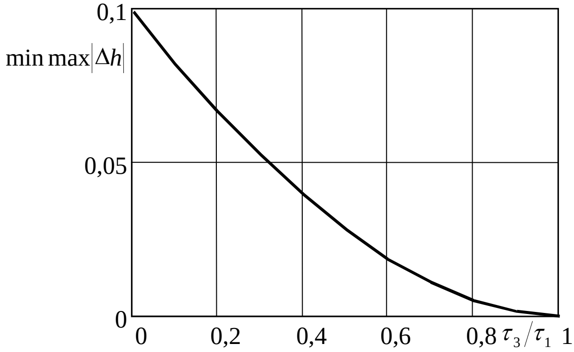

Рис. 1. Зависимость погрешности моделирования от τ_3/τ_1

Зависимость погрешности моделирования ПХ от соотношений τ_2/τ_1 показана на рис.2.

В случае, когда $\tau_3/\tau_1 = 1$ выражение (8) идентично выражению (4) и $\min\max|h| = 0$ при $\tau^* = \tau_2$.

В общем случае выражение для τ^*, соответствующей оптимальному аппроксимирующему звену, имеет вид

$$\tau^* = \tau_1\Big[1{,}13876\exp\left(-1{,}7322\left(\tau_3/\tau_1\right)\right) - 0{,}1964 +$$

$$+\left[1{,}72879 - 0{,}23598\exp\left(1{,}16465\left(\tau_3/\tau_1\right)\right)\right]\left(\tau_2/\tau_1\right)^{\left(0{,}75355+0{,}23642\left(\tau_3/\tau_1\right)\right)}\Big].$$

Погрешность аппроксимации полученных в процессе моделирования данных этим выражением находится в пределах от -0,56 % до 0,87 %.

Погрешность моделирования зависит от τ_2/τ_1 и τ_3/τ_1, как показано на рис.2.

2 Моделирование ПХ СИТ звеном второго порядка

При моделировании ПХ (7) ПХ (5) зависимость между постоянными времени может быть аппроксимирована выражением

$$\tau^* = -\tau_1\left(0{,}33192 - 1{,}3336\exp\left(0{,}57955\left(\tau_3/\tau_1\right)\right)\right).$$

Погрешность аппроксимации данным выражением лежит в пределах от –0,15 % до 0,18 %.

Погрешность моделирования показана на рис.3.

Рассмотрим аппроксимацию выражения (8) выражением (5).

В частном случае, когда $\tau_3 = 0$, аппроксимирующее выражение для τ^* имеет вид

$$\tau^* = \tau_1\left(0{,}41375 + 0{,}58697(\tau_2/\tau_1)^{0{,}8505}\right).$$

Погрешность аппроксимации полученных данных этим выражением лежит в пределах от $-0{,}43\%$ до $0{,}5\%$.

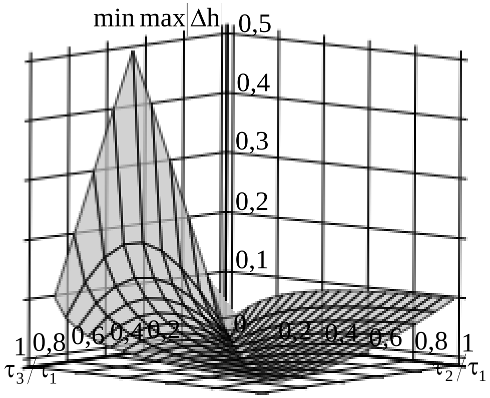

Рис. 2. Погрешность моделирования ПХ СИТ

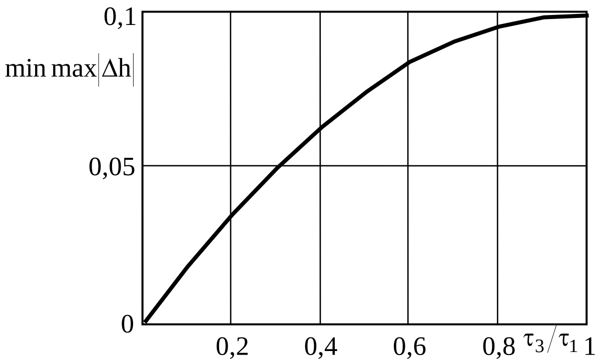

Рис. 3. Зависимость погрешности моделирования от τ_3/τ_1

Погрешность моделирования показана на рис.4.

В общем случае выражение для τ^*, соответствующей оптимальному аппроксимирующему звену, имеет вид

$$\tau^* = \tau_1\Big[0{,}72058 - 0{,}75115(\tau_3/\tau_1)^{0{,}2781} + \left(0{,}609 - 0{,}19764(\tau_3/\tau_1)^{2{,}3761}\right)\times$$

$$\times(\tau_2/\tau_1)^{\left(0{,}79635+0{,}1926(\tau_3/\tau_1)^{2{,}303}\right)}\Big].$$

Относительная погрешность такой аппроксимации лежит в пределах от $-2{,}06\%$ до $1{,}46\%$.

Погрешность моделирования зависит от τ_2/τ_1 и τ_3/τ_1, как показано на рис.4.

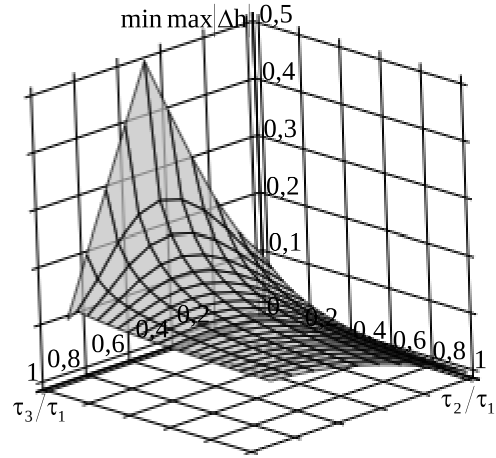

Рис. 4. Погрешность моделирования ПХ СИТ

Выводы:

1) оптимальным критерием аппроксимации ПХ апериодических СИТ является нахождение минимума максимального отклонения исследуемой характеристики от аппроксимирующей;

2) для ПХ апериодических СИТ с передаточными функциями второго порядка получены зависимости приведенной погрешности моделирования;

3) получены соотношения между постоянными времени аппроксимирующей и аппроксимируемой ПХ, что позволяет при известных параметрах ПХ описать ее с наибольшей точностью звеном более низкого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Грановский В.А. Динамические измерения: Основы метрологического обеспечения. – Л.: Энергоатомиздат, 1984. – 220 с.*
2. *РТМ 25.191-75 Средства измерения и автоматизации ГСП. Определение динамических характеристик. – М.: Изд-во стандартов, 1977. – 44 с.*

ЗАХАРОВ Игорь Петрович*, канд. техн. наук., доцент Харьковского национального университета радиоэлектроники. В 1978 году окончил Харьковский институт радиоэлектроники. Область научных интересов – измерительная идентификация.*

СЕРГИЕНКО Марина Петровна - *аспирант кафедры метрологии измерительной техники Харьковского национального университета радиоэлектроники. В 2002 году окончила ХНУРЭ. Область научных интересов – определение динамических характеристик линейных средств измерений.*