УДК 006.91

И.П. Захаров, А.П. Сергиенко, М.П. Сергиенко

ОСОБЕННОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Изложена методика обработки и оценивания неопределенности результатов параллельных измерений. Рассчитаны коэффициенты охвата для случая двух параллельных измерений методом Монте-Карло и через эффективное число степеней свободы, проанализированы отличия в полученных результатах. Рассмотрен пример оценивания неопределенности расплыва бетонной смеси.

параллельные измерения, стандартная неопределенность, расширенная неопределенность, бюджет неопределенности, коэффициент охвата

Качество продукции, изготавливаемой в различных отраслях промышленности Украины, подлежит контролю путем проведения установленных испытаний образцов в независимой испытательной лаборатории. Порядок осуществления предписанной деятельности испытательными лабораториями регламентируется ДСТУ ISO/IEC 17025:2006 [1], который предписывает необходимость предоставления информации о неопределенности полученных результатов. Следует отметить, что подавляющее число проводимых испытаний включают в себя параллельные измерения. Примерами могут служить испытания строительных материалов и конструкций (испытания бетонных смесей – удобоукладываемость, морозостойкость, прочность [2, 3], испытания железобетонных изделий [4] и т.п.); испытания продукции животного и растительного происхождения, проводимые для определения содержания в ней какого-либо элемента [5, 6], различные испытания продукции химической, металлургической, деревообрабатывающей промышленности. Обычно такие измерения обладают невысокой точностью (допускаемая погрешность может составлять до 30 %). При этом в качестве результата измерения принимается среднее арифметическое результатов параллельных наблюдений. Неопределенность получаемых результатов может быть рассчитана как классическим методом [7], так и по результатам внутрилабораторных или межлабораторных исследований по пригодности метода анализа [8].

Целью данной работы является исследование способов расчета неопределенности измерений классическим методом при использовании для получения результата параллельных наблюдений.

Классический метод расчета неопределенности [7] включает следующие операции:

1) составление модельного уравнения;

2) оценивание входных величин, внесение поправок на известные систематические эффекты в результаты их измерений;

3) вычисление оценки результата измерений;

4) определение стандартных неопределенностей входных величин;

5) определение коэффициентов чувствительности;

6) вычисление вклада неопределенности каждой входной величины в неопределенность измеряемой величины;

7) определение попарной ковариации входных величин;

8) вычисление суммарной стандартной неопределенности измеряемой величины;

9) вычисление коэффициента охвата;

10) вычисление расширенной неопределенности измеряемой величины.

При вычислении результата измерения путем усреднения результатов параллельных наблюдений применяется метод приведения [9].

Тогда модельное уравнение имеет вид

$$Y=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\left(x_i+\Delta_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\left(x_i+\Delta_i\right)=\overline{x}+\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\Delta_i\ , \quad (1)$$

где x_i − i-е показание средства измерительной техники (СИТ); Δ_i − поправка на неисключенную систематическую погрешность (НСП) СИТ.

Источниками неопределенности в этом случае являются наблюдаемое рассеяние результатов параллельных измерений и поправки к каждому из параллельных наблюдений Δ_i, математическое ожидание которых равно нулю.

Стандартную неопределенность $\overline{X}$ по типу *А* по следует рассчитывать по формуле

$$u_A(\overline{x})=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\ . \quad (2)$$

Стандартные неопределенности каждого X_i по типу *B* рассчитываются отдельно, поскольку при параллельных измерениях измеряются разные образцы и получаются разные результаты и погрешности Δ_i.

Стандартная неопределенность типа *B* результата каждого из параллельных наблюдений определяется по значению границ его НСП θ_i. В предположении равномерного распределения НСП внутри границ стандартная неопределенность результата каждого наблюдения составит

$$u_B(x_i) = \theta_i / \sqrt{3}, \; i = 1; 2,$$

Коэффициент чувствительности для $\overline{X}$ рассчитывается из выражения (1) и составляет $C(\overline{x}) = 1$. Коэффициенты чувствительности $C(x_i)$ рассчитываются из выражения (2) путем дифференцирования по каждой составляющей. Нетрудно определить, что все $C(x_i) = 1/n$.

Вклад неопределенности $u_i(y)$ каждой входной величины определяется перемножением стандартной неопределенности этой величины и ее коэффициента чувствительности. Бюджет неопределенности параллельных измерений представлен в табл. 1.

Таблица 1

Бюджет неопределенности результата параллельных измерений

Входная величина	Оценка входной величины	Стандартная неопределенность	Число степеней свободы	Распределение вероятностей входных величин	Коэффициент чувствительности	Вклад неопределенности
$\overline{X}$	$\overline{x}$	$u(\overline{x})$ (2)	$n-1$	Нормальное	1	$u(\overline{x})$
ΔX_1	0	$\theta_1/\sqrt{3}$	∞	Равномерное	$1/n$	$\frac{\theta_1}{n\sqrt{3}}$
ΔX_2	0	$\theta_2/\sqrt{3}$	∞	Равномерное	$1/n$	$\frac{\theta_2}{n\sqrt{3}}$
...	...	...	...	...	...	...
ΔX_n	0	$\theta n/\sqrt{3}$	∞	Равномерное	$1/n$	$\frac{\theta_n}{n\sqrt{3}}$
Выходная величина	Оценка выходной величины	Суммарная стандартная неопределенность	Эффективное число степеней свободы	Уровень доверия	Коэффициент охвата	Расширенная неопределенность
Y	$\overline{x}$	(4)	(5)	p = 0,95	$t_{0,95}(\nu_{eff})$	$t_{0,95}(\nu_{eff}) \cdot u_c$

Суммарную стандартную неопределенность результата параллельных измерений определим в соответствии с законом распространения неопределенности, как:

$$u_c(y) = \sqrt{u^2(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta_i^2}{3n^2}}. \quad (3)$$

Для оценивания расширенной неопределенности определим коэффициент охвата как коэффициент Стьюдента с эффективным числом степеней свободы, определяемым по формуле:

$$\nu_{eff} = (n-1)\left[\frac{u_c(y)}{u(\overline{x})}\right]^4. \quad (4)$$

Наиболее распространены на практике парные параллельные измерения. В этом случае значение ν_{eff} можно рассчитать по формуле:

$$\nu_{eff} = \left[1 + \frac{u^2(\Delta_1) + u^2(\Delta_2)}{4u^2(\overline{x})}\right]^2. \quad (5)$$

Значения коэффициента Стьюдента, в зависимости от соотношения вкладов неопределенности $2u(\overline{x})/u(\Delta_1)$ и $u(\Delta_2)/u(\Delta_1)$ приведены в табл. 2.

В табл. 3 приведены коэффициенты охвата, рассчитанные как композиция закона распределения Стьюдента и двух равномерных законов с разными соотношениями стандартных неопределенностей $u(\Delta_2)/u(\Delta_1)$.

Сравнение данных, приведенных в таблицах показывает отличие коэффициентов охвата, оцененных через эффективное число степеней свободы, по сравнению с результатами, полученными методом Монте-Карло, как при малых соотношениях $2u(\overline{x})/u(\Delta_1)$ так и при значениях, близких к 1 от +15 % до − 21 %.

Таблица 2

Зависимость коэффициентов охвата, рассчитанных через эффективное число степеней свободы

$\frac{2u(\bar{x})}{u(\Delta_1)}$	$u(\Delta_2)/u(\Delta_1)$									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0,1	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96
0,2	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96
0,3	1,98	1,98	1,97	1,97	1,97	1,97	1,97	1,97	1,97	1,96
0,4	2,01	2,00	2,00	2,00	1,99	1,99	1,98	1,98	1,98	1,97
0,5	2,06	2,06	2,05	2,04	2,03	2,02	2,01	2,00	2,00	1,99
0,6	2,14	2,13	2,12	2,11	2,09	2,07	2,06	2,04	2,03	2,02
0,7	2,26	2,26	2,23	2,20	2,18	2,14	2,12	2,10	2,07	2,06
0,8	2,45	2,45	2,36	2,36	2,31	2,26	2,20	2,18	2,14	2,11
0,9	2,57	2,57	2,57	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,23	2,18
1,0	2,78	2,78	2,78	2,78	2,57	2,57	2,45	2,45	2,36	2,26
1,1	3,18	3,18	3,18	3,18	2,78	2,78	2,78	2,57	2,45	2,36
1,2	4,30	4,30	3,18	3,18	3,18	3,18	2,78	2,78	2,57	2,57
1,3	4,30	4,30	4,30	4,30	3,18	3,18	3,18	3,18	2,78	2,78
1,4	4,30	4,30	4,30	4,30	4,30	4,30	3,18	3,18	3,18	2,78
1,5	4,30	4,30	4,30	4,30	4,30	4,30	4,30	4,30	3,18	3,18
1,6	12,71	12,71	4,30	4,30	4,30	4,30	4,30	4,30	4,30	3,18
1,7	12,71	12,71	12,71	12,71	4,30	4,30	4,30	4,30	4,30	4,30
1,8	12,71	12,71	12,71	12,71	12,71	4,30	4,30	4,30	4,30	4,30
1,9	12,71	12,71	12,71	12,71	12,71	12,71	12,71	4,30	4,30	4,30
2	12,71	12,71	12,71	12,71	12,71	12,71	12,71	12,71	4,30	4,30
2,1	12,71	12,71	12,71	12,71	12,71	12,71	12,71	12,71	12,71	4,30
2,2	12,71	12,71	12,71	12,71	12,71	12,71	12,71	12,71	12,71	12,71

Таблица 3

Зависимость коэффициентов охвата, рассчитанных методом Монте-Карло

$\frac{2u(\bar{x})}{u(\Delta_1)}$	$u(\Delta_2)/u(\Delta_1)$									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0,1	1,97	2,00	2,04	2,07	2,10	2,11	2,12	2,12	2,11	2,10
0,2	2,85	2,83	2,79	2,74	2,69	2,63	2,57	2,51	2,46	2,41
0,3	3,89	3,84	3,77	3,68	3,58	3,47	3,35	3,23	3,13	3,02
0,4	4,88	4,82	4,75	4,63	4,49	4,34	4,19	4,03	3,88	3,73
0,5	5,80	5,74	5,63	5,50	5,36	5,18	5,00	4,81	4,62	4,45
0,6	6,63	6,55	6,43	6,30	6,15	5,94	5,75	5,54	5,35	5,15
0,7	7,36	7,28	7,17	7,03	6,84	6,66	6,43	6,22	5,99	5,78
0,8	7,98	7,92	7,81	7,66	7,48	7,28	7,08	6,84	6,62	6,37
0,9	8,55	8,50	8,37	8,21	8,05	7,83	7,63	7,40	7,16	6,91
1,0	9,01	8,97	8,83	8,71	8,54	8,36	8,15	7,90	7,66	7,43
1,1	9,43	9,36	9,28	9,12	8,99	8,77	8,58	8,35	8,11	7,87
1,2	9,78	9,71	9,63	9,50	9,35	9,15	8,98	8,74	8,53	8,29
1,3	10,12	10,04	9,95	9,82	9,67	9,49	9,31	9,11	8,91	8,69
1,4	10,38	10,30	10,22	10,13	9,96	9,80	9,62	9,42	9,21	9,02
1,5	10,59	10,53	10,49	10,38	10,20	10,08	9,89	9,70	9,52	9,30
1,6	10,78	10,74	10,69	10,58	10,45	10,30	10,13	9,93	9,75	9,56
1,7	10,94	10,91	10,86	10,75	10,66	10,50	10,36	10,18	10,00	9,82
1,8	11,11	11,08	11,01	10,92	10,82	10,71	10,52	10,38	10,22	10,03
1,9	11,26	11,25	11,14	11,05	11,01	10,84	10,71	10,57	10,42	10,21
2	11,37	11,34	11,28	11,22	11,12	11,00	10,86	10,71	10,60	10,40
2,1	11,46	11,47	11,41	11,32	11,23	11,12	11,02	10,88	10,72	10,59
2,2	11,60	11,54	11,50	11,42	11,35	11,27	11,16	11,00	10,87	10,70

Это обусловлено тем, что коэффициент Стьюдента не может принимать значения меньше 1,96 (для числа степеней свободы равного бесконечности) при вероятности 0,95. Меньшие значения коэффициентов охвата, рассчитанные через число степеней свободы, по сравнению с коэффициентами, полученными методом Монте-Карло, обусловлено недостатками формулы Велча-Саттерсвейта, которая была получена приближенными аналитическими методами в 30-х – 40-х годах прошлого века [10, 11] и ее справедливость не была проверена методами численного моделирования. Разрыв между значениями соотношениях $2u(\bar{x})/u(\Delta_1)>1$ обусловлен округлением числа степеней свободы до меньшего целого числа и может быть устранен применением аппроксимации значений коэффициента Стьюдента для дробных значений степеней свободы, выполненной в [12]:

$$t_{0,95}(\nu) = 1{,}96\left[1 + 1/\left(0{,}82\nu - 0{,}87\right)\right].$$

Рассмотрим изложенную методику на примере двукратного измерения расплыва бетонной смеси линейкой [2].

1) модельное уравнение имеет вид (1);

2) результаты измерения составили $x_1 = 128$ мм и $x_2 = 134$ мм;

3) результат измерения $y = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 131$ мм;

4) стандартная неопределенность типа *A* входной величины $\bar{x}$ рассчитывается по формуле

$$u_A(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{2}}$$

и составляет 3 мм.

Стандартная неопределенность типа *B* результата каждого из параллельных наблюдений определяется по значению границ его НСП – в данном случае это допустимые границы погрешности, указанные в ГОСТ. Для $\theta = 5$ мм, стандартная неопределенность результата каждого наблюдения составит $u_B(x_i) = \theta/\sqrt{3} = 2{,}887$ мм $(i = 1; 2)$ в предположении равномерного распределения НСП внутри границ;

5) коэффициент чувствительности $C(\bar{x}) = 1$; коэффициенты чувствительности неопределенностей, оцененных по типу В, составляют 0,5;

6) вклад неопределенности, оцененной по типу *A*, составляет $u_A(\bar{x}) = 3$ мм; вклад каждой неопределенности, оцененной по типу *B*, составляет $u_B(x_i) = 1{,}444$ мм;

7) входные величины рассматриваются как некоррелированные;

8) суммарная стандартная неопределенность определяется по формуле

$$u_C(y) = \sqrt{u_A^2(y) + u_B^2(y)},$$

и составляет 3,628 мм;

9) эффективное число степеней свободы рассчитанное по формуле (5) равно 2. Коэффициент охвата определяется как коэффициент распределения Стьюдента для эффективного числа степеней свободы $\nu_{eff} = 2$ и доверительной вероятности $P = 0{,}95$, то есть $t_P = 4{,}3$.

10) расширенная неопределенность в данном примере составляет, таким образом, 15,6 мм.

Значение, рассчитанное методом Монте–Карло, составляет 27 мм.

Выводы.

Изложена методика обработки и оценивания неопределенности результатов параллельных измерений. Рассчитаны коэффициенты охвата для случая двух параллельных измерений методом Монте-Карло и через эффективное число степеней свободы, проанализированы отличия в полученных результатах. Рассмотрен пример оценивания неопределенности расплыва бетонной смеси.

ЛИТЕРАТУРА

1. ДСТУ ISO/IEC 17025:2006 Загальні вимоги до компетентності випробувальних та калібрувальних лабораторій (ISO/IEC 17025:2005, IDT). – К.: Дерспоживстандарт України. – 18 с.

2. ДСТУ БВ 2.7-114-2002 Будівельні матеріали. Суміші бетонні. Методи випробувань – К.: Держстандарт України, 2002. – 21 с.

3. Чиликов С. Кирпичников В. О метрологическом обеспечении механических испытаний бетонов в лабораторных условиях // Бетон и железобетон. 2003, № 4. С. 21-22

4. ГОСТ 8829-94 Изделия строительные железобетонные и бетонные заводского изготовления. Методы испытаний нагружением. Правила оценки прочности, жесткости и трещиностойкости. – М.: Изд-во стандартов, 1995. – 14 с.

5. ДСТУ ISO 12193:2004 Жири тваринні і рослинні та олії. Визначення вмісту свинцю методом атомно-абсорбційної спектрометрії з використанням графітової печі. – К.: Держспоживстандарт України, 2005. – 6 с.

6. МВ 3049-84 Методические указания по определению остаточных количеств антибиотиков в продуктах животноводства. – М.: ГСЭУ, 1985.– 25 с.

7. Захаров И.П., Кукуш В.Д. Теория неопределенности в измерениях. – Харьков: Консум, 2002. – 256 с.

8. Руководство ЕВРАХИМ/СИТАК. Количественное описание неопределенности в аналитиче-

ских измерениях. 2-е издание, 2000. Пер. с англ. – С.-Петербург: ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, 2002. – 149 с.

9. Rabinovich SG (2005) Measurement errors and uncertainty: theory and practice, 3rd edn. Springer, New York.

10. Welch, B. L. The significance of the differences between two means when the population variances are unequal // Biometrika, 1938, v. 29, pp. 350-362.

11. Satterthwaite F.E. An approximate distribution of estimates of variance components // Biometrics Bulletin 2: 1946. 110–114.

12. Захаров И.П. Композиция законов распределения Стьюдента // Системи обробки інформації, 2005, вип.. 8(48), с.28-35.

УДК 006.91

Особенности оценивания неопределенностей результатов параллельных измерений / И.П. Захаров, А.П. Сергиенко, М.П. Сергиенко //Системы обработки информации. – Харьков. – 2008. – Вып. ( ). – С. 00 — 00.

Изложена методика обработки и оценивания неопределенности результатов параллельных измерений. Рассчитаны коэффициенты охвата для случая двух параллельных измерений методом Монте-Карло и через эффективное число степеней свободы, проанализированы отличия в полученных результатах. Рассмотрен пример оценивания неопределенности расплыва бетонной смеси.

Библиогр.: 12 назв.

УДК 006.91

Особливості оцінювання невизначеності результатів паралельних вимірювань / І.П. Захаров, А.П. Сергієнко, М.П. Сергієнко //Системи обробки інформації . – Харків. – 2008. – Вип. ( ). – С. 00 — 00.

Викладена методика обробки та оцінювання невизначеності результатів паралельних вимірювань. Розраховані коефіцієнти покриття для случаю двох паралельних вимірювань методом Монте-Карло та через ефективне число степенів свободи, проаналізовано відмінність у отриманих результатах. Розглянуто приклад оцінювання невизначеності расплиbу бетонної суміші.

Бібліогр.: 12 назв.

паралельні вимірювання, стандартна невизначеність, розширена невизначеність, бюджет невизначеності, коефіцієнт покриття.

UDC 006.91

The particular qualities of analytical measurements uncertainty/ I.P. Zakharov, A.P. Sergienko, M.P. Sergienko //Systemi obrobki informacii. – Kharkov. – 2008. – №. ( ). – P. 00 — 00.

The technique of processing and evaluating uncertainty of results of parallel measurements is stated. Factors of scope for a case of two parallel measurements by a method of Monte Carlo and through effective number of degrees of freedom are designed, differences in the received results are analysed. The example оценивания uncertainty расплыва a concrete mix is considered.

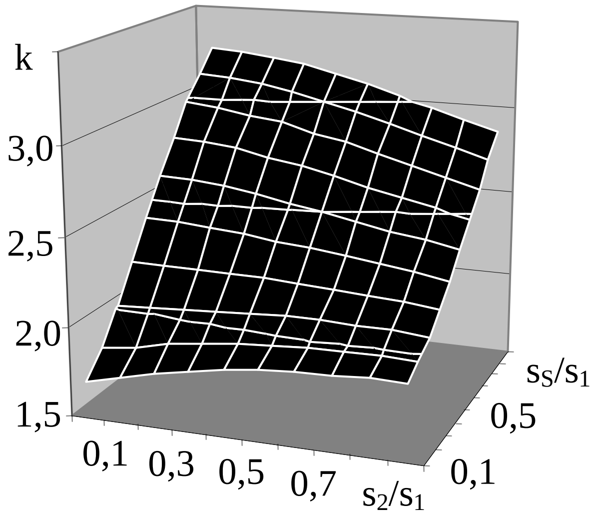
Ref.: 12 items.

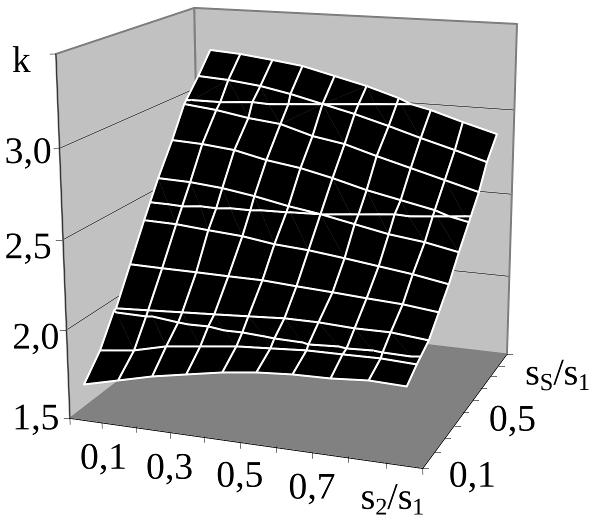
parallel measurements, standard uncertainty, expanded uncertainty, budget of uncertainty, coverage factor

Захаров Игорь Петрович – Харьковский национальный университет радиоэлектроники, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры метрологии и измерительной техники

Сергиенко Анастасия Петровна – ООО «КОРАЛ-ХАРЬКОВ», главный технолог

Сергиенко Марина Петровна – Харьковский национальный университет радиоэлектроники, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры метрологии и измерительной техники


k
3,0
2,5
2,0
1,5
0,1
0,3
0,5
0,7
s_2/s_1
s_S/s_1
0,5
0,1


k
3,0
2,5
2,0
1,5
0,1
0,3
0,5
0,7
s_2/s_1
s_S/s_1
0,5
0,1