

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ИХ ВЗАИМНОМ ПЕРЕСЧЕТЕ

В работе исследуются вопросы оценивания стандартной неопределенности при пересчете одних дискретно измеренных динамических характеристик в другие. В частности рассмотрены случаи оценивания неопределенности при нахождении переходной характеристики по дискретно измеренным импульсной и комплексной частотной характеристикам; при нахождении импульсной характеристики по переходной и комплексной частотной характеристикам; при нахождении комплексной частотной характеристики по переходной, импульсной и амплитудно-частотной и фазочастотной характеристикам.

Ключевые слова: стандартная неопределенность, средство измерительной техники, динамическая характеристика, переходная характеристика, импульсная характеристика, комплексная частотная характеристика.

В настоящее время динамические измерения получают все большее развитие, что связано с увеличением количества человеческих знаний о природе различных физических процессов, расширением возможностей исследовательского оборудования в различных областях науки и техники, повышением точности и быстродействия средств измерительной техники (СИТ). Динамические свойства СИТ описываются их динамическими характеристиками (ДХ) [1 – 8], которые при современном уровне науки и технологий в подавляющем большинстве случаев определяются путем дискретных измерений характеристики с последующей ее идентификацией (то есть определением порядка и вида математической модели и аналитического выражения, оптимально описывающих ДХ) [9].

Целью данной работы является нахождение оценок стандартной неопределенности при пересчете одних дискретно измеренных ДХ в другие. Необходимость этого вызвана широким внедрением концепции неопределенности в сферу оценивания точности измерений [10, 11], и явно недостаточным ее применением в рамках теории динамических изменений. С точки зрения классической теории погрешностей эта задача решена в [12].

Взаимный пересчет дискретно измеренных ДХ

При дискретном измерении ограниченной по времени (частоте) ДХ при пересчете одной ДХ в другую интегрирование заменяется суммированием полученных дискретных отсчетов исходной ДХ. В этом случае вместо интегральных форм преобразований Фурье и Лапласа используются их дискретные формы. Для взаимного пересчета ДХ применя-

ют следующие выражения.

Для определения дискретного значения переходной характеристики:

– по импульсной характеристике

$$h(i\Delta t) = \Delta t \sum_{n=1}^i g(n\Delta t), \quad (1)$$

где Δt – период дискретизации переходной (импульсной) характеристики;

$g(n\Delta t)$ – дискретные значения импульсной характеристики;

– по комплексной частотной характеристике

$W(j\omega)$ – дискретное обратное преобразование Фурье от $W(j\omega)/(j\omega)$:

$$\begin{aligned} h(i\Delta t) &= \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=1}^N \frac{W(jn\Delta\omega)}{jn\Delta\omega} e^{jn\Delta\omega\Delta t} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \frac{W(jn\Delta\omega)}{jn} e^{jn\Delta\omega\Delta t}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Delta\omega$ – период дискретизации круговой частоты ω ;

– по передаточной функции СИТ $W(p)$ – дискретное обратное преобразование Лапласа от $W(p)/p$

$$\begin{aligned} h(i\Delta t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} \frac{W(p)}{p} e^{ip\Delta t} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=1}^N \frac{W(n\Delta p)}{n} e^{in\Delta p\Delta t}, \end{aligned} \quad (3)$$

где Δp – период дискретизации переменной p оператора Лапласа.

Для определения дискретного значения им-

пульсной характеристики:

– по переходной характеристике

$$g(i\Delta t) = \frac{h(i\Delta t) - h[(i-1)\Delta t]}{\Delta t}; \quad (4)$$

– по комплексной частотной характеристике – дискретное обратное преобразование Фурье от $W(j\omega)$

$$g(i\Delta t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=1}^N W(jn\Delta\omega) e^{jn\Delta\omega\Delta t}; \quad (5)$$

– по передаточной функции – дискретное обратное преобразование Лапласа от $W(p)$

$$\begin{aligned} g(i\Delta t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} W(p) e^{ip\Delta t} dp = \\ &= \frac{\Delta p}{2\pi j} \sum_{n=1}^N W(n\Delta p) e^{in\Delta p\Delta t}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для определения дискретного значения комплексной частотной характеристики:

– по переходной характеристике

$$W(jn\Delta\omega) = jn\Delta\omega\Delta t \sum_{i=1}^N h(i\Delta t) e^{-jn\Delta\omega\Delta t}; \quad (7)$$

– по импульсной характеристике – дискретное преобразование Фурье от $g(t)$

$$W(jn\Delta\omega) = \Delta t \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) e^{-jn\Delta\omega\Delta t}. \quad (8)$$

– по совокупности амплитудно-частотной $A(n\Delta\omega)$ и фазочастотной $\Phi(n\Delta\omega)$ характеристик (АЧХ и ФЧХ)

$$W(jn\Delta\omega) = A(n\Delta\omega) e^{j\Phi(n\Delta\omega)}. \quad (9)$$

Для определения передаточной функции

– по переходной характеристике

$$W(p) = p\Delta t \sum_{i=1}^N h(i\Delta t) e^{-ip\Delta t}; \quad (10)$$

– по импульсной характеристике – дискретное преобразование Лапласа от $g(t)$

$$W(p) = \Delta t \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) e^{-ip\Delta t}; \quad (11)$$

– по комплексной частотной характеристике путем замены $(j\omega)$ на p .

Оценивание стандартных неопределенностей ДХ

Стандартная неопределенность ДХ ζ , полученной путем пересчета других ДХ, измеренных в дискретных точках ξ_i , в общем случае может быть рассчитана по формуле

$$u(\zeta) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_i} \right)^2 u^2(\xi_i)}, \quad (12)$$

где $u(\xi_i)$ – стандартные неопределенности дис-

кретно измеренных значений исходной характеристики. При этом не учитываются вклады неопределенностей различных неинформативных параметров и условия окружающей среды, которые могут быть учтены известными методами [11].

Если стандартные неопределенности дискретно измеренных значений исходной характеристики одинаковы, то есть $u(\xi_1) = u(\xi_2) = \dots = u(\xi)$, что выполняется в большинстве практических случаев, то стандартная неопределенность

$$u(\zeta) = u(\xi) \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_i} \right)^2}. \quad (13)$$

Стандартная неопределенность переходной характеристики при определении:

– по дискретно измеренной импульсной характеристике (выражение (1))

$$\begin{aligned} u(h(i\Delta t)) &= \Delta t \sqrt{\sum_{n=1}^i u^2(g(n\Delta t))} = \\ &= \Delta t \sqrt{i} u(g(\Delta t)). \end{aligned} \quad (14)$$

– по комплексной частотной характеристике (выражение (2)) может быть определена из следующих соображений. Представим выражение (2) в виде

$$\begin{aligned} h(i\Delta t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \frac{W(jn\Delta\omega)}{n} [\sin(in\Delta\omega\Delta t) - \\ &- j\cos(in\Delta\omega\Delta t)] = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} [\alpha(n) - j\beta(n)], \end{aligned}$$

где $\alpha(n) = W(jn\Delta\omega) \sin(in\Delta\omega\Delta t)$;

$\beta(n) = W(jn\Delta\omega) \cos(in\Delta\omega\Delta t)$

Стандартная неопределенность полученной переходной характеристики

$$\begin{aligned} u(h(i\Delta t)) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\sum_{n=1}^N \left[\left(\frac{1}{n} \right)^2 u^2(\alpha(n)) + \left(-\frac{j}{n} \right)^2 u^2(\beta(n)) \right]} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} [u^2(\alpha(n)) + u^2(\beta(n))]}. \end{aligned}$$

Неопределенности величин $\alpha(n)$ и $\beta(n)$ соответственно имеют вид:

$$u(\alpha(n)) = \sin(in\Delta\omega\Delta t) u(W(jn\Delta\omega));$$

$$u(\beta(n)) = \cos(in\Delta\omega\Delta t) u(W(jn\Delta\omega)),$$

поэтому

$$u(h(i\Delta t)) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} u^2(W(jn\Delta\omega))}. \quad (15)$$

Если $u(W(j\Delta\omega)) = u(W(j2\Delta\omega)) = \dots = u(W(j\Delta\omega))$, то

$$u(h(i\Delta t)) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} u^2(W(j\Delta\omega))}.$$

Если при этом $N \rightarrow \infty$, то сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

[13], и тогда

$$u(h(i\Delta t)) = \frac{1}{2\sqrt{6}} u(W(j\Delta\omega)). \quad (16)$$

Стандартная неопределенность импульсной характеристики при определении:

- по дискретно измеренной переходной характеристике в соответствии с выражением (4)

$$u(g(i\Delta t)) = \frac{1}{\Delta t} \sqrt{u^2(h(i\Delta t)) + u^2(h[(i-1)\Delta t])}. \quad (17)$$

Если $u(h(i\Delta t)) = u(h[(i-1)\Delta t]) = u(h(\Delta t))$,

$$u(g(i\Delta t)) = \frac{\sqrt{2}}{\Delta t} u(h(\Delta t)); \quad (18)$$

- по комплексной частотной характеристике в соответствии с выражением (5) может быть определена следующим образом.

Представим выражение (5) в виде

$$g(i\Delta t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=1}^N W(jn\Delta\omega) [\cos(in\Delta\omega\Delta t) + j\sin(in\Delta\omega\Delta t)] = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=1}^N [\alpha(n) + j\beta(n)],$$

где $\alpha(n) = W(jn\Delta\omega) \cos(in\Delta\omega\Delta t)$;

$\beta(n) = W(jn\Delta\omega) \sin(in\Delta\omega\Delta t)$.

Стандартная неопределенность импульсной характеристики в этом случае будет иметь вид

$$u(g(i\Delta t)) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sqrt{\sum_{n=1}^N [u^2(\alpha(n)) + j^2 u^2(\beta(n))]} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sqrt{\sum_{n=1}^N [u^2(\alpha(n)) - u^2(\beta(n))]},$$

где $u(\alpha(n)) = \cos(in\Delta\omega\Delta t) u(W(jn\Delta\omega))$;

$u(\beta(n)) = \sin(in\Delta\omega\Delta t) u(W(jn\Delta\omega))$.

Стандартная неопределенность импульсной характеристики

$$u(g(i\Delta t)) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sqrt{\sum_{n=1}^N \cos(2in\Delta\omega\Delta t) u^2(W(jn\Delta\omega))}. \quad (19)$$

Если $W(j\Delta\omega) = W(j2\Delta\omega) = \dots = W(j\Delta\omega)$, тогда

$$u(g(i\Delta t)) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sqrt{\sum_{n=1}^N \cos(2in\Delta\omega\Delta t) u^2(W(j\Delta\omega))}. \quad (20)$$

Стандартная неопределенность комплексной частотной характеристики при ее нахождении:

- по переходной характеристике в соответствии с выражением (7) может быть оценена следующим образом. Представим выражение (7) в виде

$$W(jn\Delta\omega) = n\Delta\omega\Delta t \sum_{i=1}^N jh(i\Delta t) [\cos(-in\Delta\omega\Delta t) + j\sin(-in\Delta\omega\Delta t)] = n\Delta\omega\Delta t \sum_{i=1}^N h(i\Delta t) [\sin(in\Delta\omega\Delta t) + j\cos(in\Delta\omega\Delta t)] = n\Delta\omega\Delta t \sum_{i=1}^N [\alpha(n) + j\beta(n)],$$

где $\alpha(n) = h(i\Delta t) \sin(in\Delta\omega\Delta t)$;

$\beta(n) = h(i\Delta t) \cos(in\Delta\omega\Delta t)$.

Стандартная неопределенность комплексной частотной характеристики

$$u(W(jn\Delta\omega)) = n\Delta\omega\Delta t \sqrt{\sum_{i=1}^N [u^2(\alpha(n)) - u^2(\beta(n))]},$$

а стандартные неопределенности $\alpha(n)$ и $\beta(n)$ равны соответственно

$$u(\alpha(n)) = \sin(in\Delta\omega\Delta t) u(h(i\Delta t));$$

$$u(\beta(n)) = \cos(in\Delta\omega\Delta t) u(h(i\Delta t)).$$

Стандартная неопределенность комплексной частотной характеристики

$$u(W(jn\Delta\omega)) = n\Delta\omega\Delta t \sqrt{\sum_{i=1}^N [2\sin^2(in\Delta\omega\Delta t) - 1] u^2(h(i\Delta t))}. \quad (21)$$

Если $h(\Delta t) = h(2\Delta t) = \dots = h(\Delta t)$, тогда

$$u(W(jn\Delta\omega)) = n\Delta\omega\Delta t \sqrt{\sum_{i=1}^N [2\sin^2(in\Delta\omega\Delta t) - 1] u^2(h(\Delta t))}. \quad (22)$$

- по импульсной характеристике в соответствии с выражением (8) может быть оценена аналогично. Запишем выражение (8) в следующем виде

$$W(jn\Delta\omega) = \Delta t \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) [\cos(-in\Delta\omega\Delta t) + j\sin(-in\Delta\omega\Delta t)] =$$

$$= \Delta t \sum_{i=1}^N [\alpha(n) + j\beta(n)],$$

где $\alpha(n) = g(i\Delta t) \cos(-in\Delta\omega\Delta t)$;

$\beta(n) = g(i\Delta t) \sin(-in\Delta\omega\Delta t)$.

Стандартная неопределенность комплексной частотной характеристики

$$u(W(jn\Delta\omega)) = \Delta t \sqrt{\sum_{i=1}^N [u^2(\alpha(n)) - u^2(\beta(n))]},$$

где $u(\alpha(n)) = \cos(-in\Delta\omega\Delta t) u(g(i\Delta t))$,

$u(\beta(n)) = \sin(-in\Delta\omega\Delta t) u(g(i\Delta t))$ - стандартные неопределенности величин $\alpha(n)$ и $\beta(n)$.

Стандартная неопределенность

$$u(W(jn\Delta\omega)) = \Delta t \sqrt{\sum_{i=1}^N \cos(-2in\Delta\omega \Delta t) u^2(g(i\Delta t))}. \quad (23)$$

Если $g(\Delta t) = g(2\Delta t) = \dots = g(\Delta t)$, то

$$u(W(jn\Delta\omega)) = \Delta t \sqrt{\sum_{i=1}^N \cos(-2in\Delta\omega \Delta t) u(g(\Delta t))}; \quad (24)$$

- по АЧХ и ФЧХ, полученным экспериментально, в соответствии с выражением (9) аналогичным образом.

Представим выражение (9) в алгебраической форме [13]

$$W(jn\Delta\omega) = P(n\Delta\omega) + jQ(n\Delta\omega),$$

где $P(n\Delta\omega) = A(n\Delta\omega) \cos(\Phi(n\Delta\omega))$;

$Q(n\Delta\omega) = A(n\Delta\omega) \sin(\Phi(n\Delta\omega))$ - соответственно вещественная и мнимая частотные характеристики.

Стандартная неопределенность комплексной частотной характеристики в этом случае будет иметь вид

$$u(W(jn\Delta\omega)) = \sqrt{u^2(P(n\Delta\omega)) + j^2 u^2(Q(n\Delta\omega))} = \sqrt{u^2(P(n\Delta\omega)) - u^2(Q(n\Delta\omega))},$$

где квадраты стандартных неопределенностей

$$\begin{aligned} u^2(P(n\Delta\omega)) &= \cos^2(\Phi(n\Delta\omega)) u^2(A(n\Delta\omega)) + \\ &+ A^2(n\Delta\omega) \sin^2(\Phi(n\Delta\omega)) u^2(\Phi(n\Delta\omega)); \\ u^2(Q(n\Delta\omega)) &= \sin^2(\Phi(n\Delta\omega)) u^2(A(n\Delta\omega)) + \\ &+ A^2(n\Delta\omega) \cos^2(\Phi(n\Delta\omega)) u^2(\Phi(n\Delta\omega)). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в предыдущее, можно получить формулу для оценивания стандартной неопределенности комплексной частотной характеристики

$$u(W(jn\Delta\omega)) = \left[\cos(2\Phi(n\Delta\omega)) \times \left[u^2(A(n\Delta\omega)) - A^2(n\Delta\omega) u^2(\Phi(n\Delta\omega)) \right] \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

Стандартные неопределенности передаточных функций можно получить аналогично либо из неопределенностей комплексной частотной характеристики путем замены $j\Delta\omega$ на оператор Лапласа p .

Выводы

Проведенное исследование позволяет осуществлять оценивание неопределенности при взаимном пересчете дискретно измеренных ДХ. Полученные выражения справедливы для СИТ, моделируемых динамическими звеньями любого типа, что существенно упрощает процедуру получения результата измерения и его неопределенности.

Список литературы

1. ГОСТ 8.009-84 ГСИ. Нормирование и использование метрологических характеристик средств измере-

ний.-М.: Изд-во стандартов, 1988.-38 с.

2. ГОСТ 8.256-77 ГСИ. Нормирование и определение динамических характеристик аналоговых средств измерений. Основные положения. - М.: Изд-во стандартов, 1980. - 8 с.

3. ГОСТ 8.508-84 ГСИ. Метрологические характеристики средств измерений и точностные характеристики средств автоматизации ГСП. Общие методы оценки и контроля. - М.: Изд-во стандартов, 1984. - 53 с.

4. МИ 02-001-96 ГСИ. Методика оценивания погрешностей измерения динамических характеристик линейных средств измерений. - Львов: ГНИИ «Система», 1996. - 77 с.

5. МИ 1951-88 ГСИ. Динамические измерения. Термины и определения. - М.: Изд-во стандартов, 1990. - 17 с.

6. РТМ 25.191-75 Средства измерения и автоматизации ГСП. Определение динамических характеристик. - М.: Изд-во стандартов, 1977. - 44 с.

7. МИ 2090-90 Определение динамических характеристик линейных аналоговых средств измерений с сосредоточенными параметрами. Общие положения. - М.: Изд-во стандартов, 1991. - 64 с.

8. РД 50-453-84 Характеристики погрешности средств измерений в реальных условиях эксплуатации. Методы расчета. - М.: Изд-во стандартов, 1988. - 17 с.

9. Грановский В.А. Динамические измерения: Основы метрологического обеспечения. - Л.: Энергоатомиздат, 1984. - 220 с.

10. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. ISO, Geneva, First Edition. - 1995 - 101 p. Пер. с англ. - С.-Петербург: ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, 1999 - 126 с.

11. Захаров И.П., Кукуш В.Д. Теория неопределенности в измерениях. Учеб. пособие: - Харьков: Консум, 2002. - 256 с.

12. Сергиенко М.П. Исследование трансформации погрешностей динамических характеристик средств измерительной техники при их взаимном пересчете// Системы управления, навигации и связи, 2007. - Вып. 4. - С. 108 - 111.

13. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. - М.: Наука, 1981. - 718 с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.П. Захаров, Харьковский национальный университет радиоэлектроники.

Автор: СЕРГИЕНКО Марина Петровна

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, кандидат технических наук, доцент кафедры метрологии и измерительной техники.

Раб. тел. - 702-13-31, дом. тел. - 756-62-94, E-mail - sergienkotarina@mail.ru.

Невизначеності динамічних характеристик при їх взаємному перерахуванні

М.П. Сергієнко

В роботі досліджуються питання оцінювання стандартної невизначеності при перерахуванні одних дискретно вимірених динамічних характеристик в інші. Зокрема розглянуті випадки оцінювання невизначеності при знаходженні перехідної характеристики за дискретно виміреними імпульсною та комплексною частотною характеристиками; при знаходженні імпульсної характеристики за дискретно виміреними перехідною та комплексною частотною характеристиками; при знаходженні комплексної частотної характеристики за перехідною,

імпульсною та амплітудно-частотною і фазочастотною характеристиками.

Ключові слова: стандартна невизначеність, засіб виміральної техніки, динамічна характеристика, перехідна характеристика, імпульсна характеристика, комплексна частотна характеристика.

**The uncertainty of the dynamic characteristics
by their mutual translation**

M.P. Sergienko

The questions of estimation standard uncertainty by translation from ones dynamic characteristics into others are research in this work. Specifically the cases of estimation uncertainty considered when a transient characteristic got from a pulse characteristic or a complex frequency characteristic; a pulse characteristic got from a transient characteristic or a complex frequency characteristic; a complex frequency characteristic got from a transient characteristic or a pulse characteristic or from an amplitude-frequency characteristic and a phase-frequency characteristic.

Keywords: standard uncertainty, measurement instrument, dynamic characteristic, transient characteristic, pulse characteristic, complex frequency characteristic.