УДК 621.317

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЦ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ЛИНЕАРИЗАЦИИ ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

И.П. ЗАХАРОВ, О.В. ПОНОМАРЕВА, Г.Г. САФАРЯН, М.П. СЕРГИЕНКО

Исследуется корректность критерия допустимости применения метода линеаризации при обработке результатов косвенных измерений. На примере степенной и показательной функций одной переменной для нормального, равномерного, арксинусного и двойного экспоненциального законов распределений с помощью метода Монте-Карло оценивается относительная погрешность получения оценок математического ожидания, среднего квадратического отклонения и доверительных границ результата однократного косвенного измерения.

Косвенные измерения широко распространены в метрологической практике, при этом для уменьшения сложности расчетов и снижения трудоемкости и временных затрат на обработку результатов измерения применяют методы линеаризации, приведенные в [1-3]. Принято считать, что использование критерия допустимости линеаризации нелинейной зависимости обеспечивает необходимую точность полученных результатов, однако правомочность и эффективность применения этого критерия для различных функций в научно-технической литературе исследованы не были.

Актуальность исследования критерия допустимости линеаризации нелинейных функций вызвана широким использованием косвенных измерений в прецизионных средствах измерительной техники, где постоянно повышаются требования к допускаемой погрешности результатов измерений.

Цель работы – исследование возможности применения критерия допустимости линеаризации нелинейных функций одной переменной при косвенных измерениях для различных законов распределения аргумента методом Монте-Карло.

Задачи исследования – получение значений погрешностей оценок математического ожидания, среднеквадратического отклонения (СКО) и доверительных границ (ДГ) результата однократного косвенного измерения при использовании данного критерия.

При оценивании погрешности косвенных измерений в общем случае рассматривается ситуация, когда измеряемая величина Y не является прямо измеряемой, а выражается известной функциональной зависимостью от m аргументов X_1, $X_2, \ldots,$ X_m

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_m)\,. \tag{1}$$

Метод линеаризации [1-3] предполагает разложение функции (1) в ряд Тейлора

$$f(X_1, X_2, ..., X_m) = f(x_1, x_2, ..., x_m) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta X_i + R\,, \tag{2}$$

где x_1, $x_2, \ldots,$ x_m – оценки измеряемой величины;

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ – первая производная от функции f по аргументу X_i, вычисленная в точках x_1, $x_2, \ldots,$ x_m;

ΔX_i – отклонение результата измерения аргумента от его истинного значения;

R – остаточный член, который аппроксимируют членом второго порядка ряда Тейлора:

$$R \approx \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\Delta X_i \cdot \Delta X_j)\,. \tag{3}$$

Метод линеаризации считается допустимым, если можно пренебречь остаточным членом, критерием чего является выполнение неравенства

$$|R|<0{,}8\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 S^2(x_i)}\,, \tag{4}$$

где $S(x_i)$ – СКО случайных погрешностей результата измерения аргумента X_i.

В этом случае погрешность косвенного измерения представляет собой линейную функцию относительно погрешностей аргументов

$$\Delta Y=f(X_1,X_2,\ldots X_m)-f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta X_i \tag{5}$$

с нулевым математическим ожиданием (в случае отсутствия систематических погрешностей в результатах измерения аргументов) и СКО

$$S(\Delta Y)=S(y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 S^2(x_i)+2\sum_{j=2}^{m}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}\rho_{ij}S(x_i)S(x_j)}\,, \tag{6}$$

где ρ_{ij} – коэффициент корреляции между погрешностями аргументов.

Наличие остаточного члена приводит к смещению результата измерения, изменению его СКО и доверительных границ погрешности.

В работе с помощью метода Монте-Карло [4] исследуется корректность применения выражения (4) в качестве критерия применимости линеаризации на примере косвенных однократных измерений функции одного аргумента

$$Y=f(X). \tag{7}$$

В этом случае $\Delta Y=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta X$, $S(y)=\frac{\partial f}{\partial x}S(x)$,

а критерий (4) принимает вид

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|\Delta X^2<0{,}8\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|S(x), \tag{8}$$

Если закон распределения аргумента известен, то в выражении (8)

$$\Delta X=t_p S(x),$$

где t_p - доверительный коэффициент, соответствующий этому закону распределения и заданной доверительной вероятности $P_Д$ (для ограниченных законов распределения $P_Д=1$), и поэтому критическое значение СКО аргумента, при котором допустим метод линеаризации, будет определяться из выражения

$$S_{кр}(x)=\frac{1{,}6\left|\partial f/\partial x\right|}{t_p^2\left|\partial^2 f/\partial x^2\right|}. \tag{9}$$

Это выражение будет иметь вид

$S_{кр}(x)=\frac{1{,}6x}{t_p^2|k\mp 1|}$ для степенной функции $Y=X^{\pm k}$, где $k=\frac{1}{2};\frac{1}{3};\ldots;1;2;3;\ldots$ (функция $Y=X$ не рассматривается, поскольку является линейной);

$S_{кр}(x)=\frac{1{,}6}{t_p^2\,k}$ для показательной функции $Y=e^{\pm kX}$, где $k=1;2;3;\ldots$.

В табл. 1 приведены значения критических значений СКО для различных законов распределения и степенной и показательной функциональных зависимостей.

Таблица 1

$S_{кр}(x)$	Закон распределения x			
Функция $Y(X)$	Арксинусный $P_Д = 1$; $t_p = \sqrt{2}$	Равномерный $P_Д = 1$; $t_p = \sqrt{3}$	Нормальный $P_Д = 0{,}9973$; $t_p = 3$	Двойной экспоненциальный (Лапласа) $P_Д = 0{,}9973$; $t_p = 4{,}18$
$X^{\pm k}$	$0{,}8\frac{x}{\lvert k \mp 1\rvert}$	$0{,}53(3)\frac{x}{\lvert k \mp 1\rvert}$	$0{,}17(7)\frac{x}{\lvert k \mp 1\rvert}$	$0{,}09157\frac{x}{\lvert k \mp 1\rvert}$
e^{-kX}	$\frac{0{,}8}{k}$	$\frac{0{,}53(3)}{k}$	$\frac{0{,}17(7)}{k}$	$\frac{0{,}09157}{k}$

На рис.1–4 показаны плотности вероятности измеряемой величины, полученной методом линеаризации (кривые 1), и трансформированные плотности вероятности (кривые 2) для разных законов распределения аргумента и квадратичной функциональной зависимости при критическом СКО.

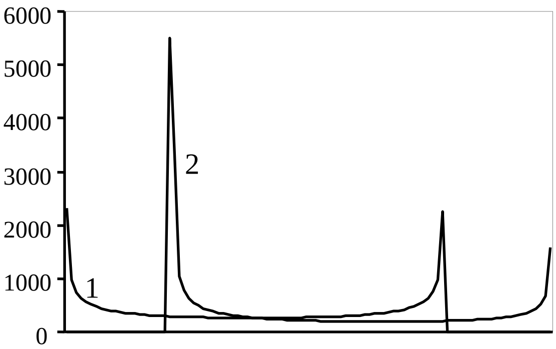

Рис.1. Распределение по закону арксинуса

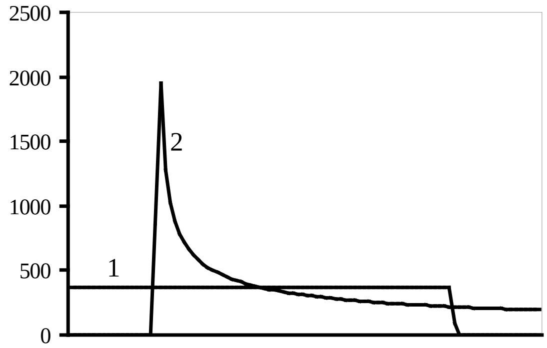

Рис.2. Равномерное распределение

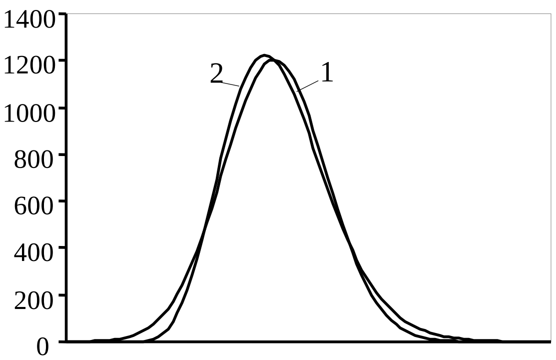

Рис.3. Нормальное распределение

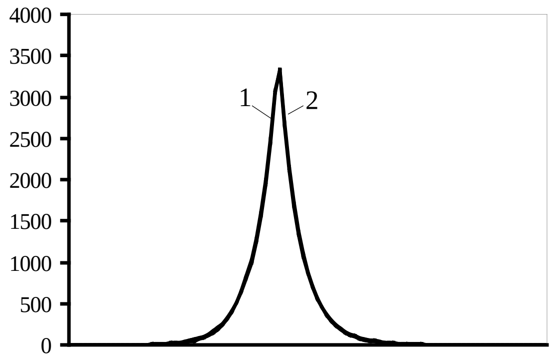

Рис.4. Распределение Лапласа

Действительные значения математического ожидания $M(y)$, СКО $S(y)$ и доверительных границ $\Delta_p(y)$ результата измерения были определены из трансформированной функции распределения, полученной методом Монте-Карло для заданной функциональной зависимости и известной функции распределения аргумента. Относительные погрешности вычисления этих параметров при применении метода линеаризации определялись в соответствии с выражениями

$$\delta[y] = \frac{(\partial f/\partial x)\,x - y}{y}\cdot 100\,\%,\ \ \delta[S(y)] = \frac{(\partial f/\partial x)\,S(x) - S(y)}{S(y)}\cdot 100\,\%$$

$$\delta[\Delta_p(y)] = \frac{(\partial f/\partial x)\,\Delta_p(x) - \Delta_p(y)}{\Delta_p(y)}\cdot 100\,\%$$

и показаны в табл.2.

Таблица 2

Погрешность, %	Закон распределения x											
Функция y(x)	Арксинусный			Равномерный			Нормальный			Лапласа		
	МО	СКО	ДГ	МО	СКО	ДГ	МО	СКО	ДГ	МО	СКО	ДГ
x^2	**-39**	**-4**	**0**	-22	-2,7	0	-3,1	-0,75	0	-0,83	-0,41	0
x^3	-32	-10	-10	-18	-6,5	-6,6	-2,3	-1,5	-0,78	-0,62	-0,81	-1,2
x^4	-30	-13	-12	-16	-7,8	-8,7	-2,1	-1,8	-1,0	-0,56	-0,95	-1,6
x^5	-29	-14	-14	-15	-8,5	-10	-1,9	-1,9	-1,2	-0,52	-1,0	-1,8
x^6	-29	-14	-15	-15	-8,9	-10	-1,9	-2,0	-1,2	-0,50	-1,1	-1,9
x^7	-28	-15	-15	-14	-9,1	-11	-1,8	-2,0	-1,3	-0,49	-1,1	-2,0
e^{kx}	-26	-17	-19	-13	-11	-13	-1,6	-2,3	-4,6	-0,42	-1,2	-2,4
x^{-7}	-24	-20	-21	-12	-12	-15	-1,4	-2,5	-5,2	-0,37	-1,3	-2,7
x^{-6}	-24	-20	-22	-11	-12	-15	-1,4	-2,5	-5,3	-0,36	-1,4	-2,8
x^{-5}	-23	-20	-22	-11	-12	-15	-1,3	-2,6	-5,4	-0,35	-1,4	-2,8
x^{-4}	-23	-21	-23	-11	-12	-16	-1,3	-2,6	-5,5	-0,34	-1,4	-2,9
x^{-3}	-22	-22	-24	-10	-13	-17	-1,2	-2,7	-5,8	-0,32	-1,4	-3,0
x^{-2}	-21	-24	-26	-9,5	-14	-18	-1,1	-2,9	-6,2	-0,28	-1,5	-3,2
x^{-1}	-18	-28	-32	-7,6	-16	-21	-0,80	-3,2	-7,1	-0,21	-1,7	-3,7
$x^{-1/2}$	-14	-35	-40	-5,5	-19	-26	-0,54	-3,5	-8,1	-0,14	-1,9	-4,1
$x^{-1/3}$	-12	-40	-47	-4,3	-20	-28	-0,41	-3,7	-8,6	-0,11	-1,9	-4,3
$x^{-1/4}$	-11	-45	-52	-3,5	-21	-30	-0,33	-3,8	-8,9	-0,09	-2,0	-4,5
$x^{-1/5}$	-10	-49	-58	-3	-22	-31	-0,27	-3,9	-9,1	-0,07	-2,0	-4,6
$x^{-1/6}$	-10	-54	-64	-2,6	-23	-33	-0,23	-3,9	-9,3	-0,06	-2,1	-4,7
$x^{-1/7}$	-10	-60	-72	-2,3	-23	-33	-0,21	-4,0	-9,4	-0,05	-2,1	-4,7
$x^{1/7}$	*	*	*	*	*	*	0,28	-4,7	-12	0,07	-2,4	-5,6
$x^{1/6}$	*	*	*	*	*	*	0,34	-4,8	-12	0,09	-2,5	-5,7
$x^{1/5}$	*	*	*	*	*	*	0,43	-5,0	-13	0,11	-2,6	-5,9
$x^{1/4}$	*	*	*	*	*	*	0,57	-5,3	-13	0,15	-2,7	-6,2
$x^{1/3}$	*	*	*	*	*	*	0,88	-6,4	-16	0,22	-3,0	-6,9
$x^{1/2}$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	0,44	-2,9	-9,4

Выделенные полужирным шрифтом значения погрешностей в табл. 2 указывают на то, что полученные методом Монте-Карло для заданного критического СКО законы распределения содержат отрицательные значения аргументов, возведение которых в квадрат делает возможным получение результатов. Звездочки вместо оценок погрешностей для степенных функций с дробными степенями говорят о том, что эти погрешности получить не удалось, поскольку отрицательные значения распределений не дают возможности извлечения корня. Из рис. 1-4 видно, что наименьшей трансформации подвергаются законы распределения с неотрицательными эксцессами (Лапласа, нормальный), а наибольшей – законы, характеризующиеся отрицательными эксцессами (арксинусный, равновероятный). При оценке доверительных границ методом линеаризации при квадратичной функциональной зависимости получается нулевая погрешность, что подтверждается ранее проведенными исследованиями [5].

Научная новизна проведенных исследований заключается в установлении неполного соответствия широко распространенного в метрологической практике критерия проверки возможности линеаризации предъявляемым требованиям даже для простейших нелинейных функций.

Практическая значимость результатов состоит в нахождении сочетаний вида функции и закона распределения аргументов, при которых использование данного критерия практически не имеет смысла.

По сравнению с аналогами приведенный метод исследования критерия допустимости линеаризации нелинейных зависимостей обладает высокой точностью и простотой, а также позволяет работать с функциями различного вида и порядка. Применение метода Монте-Карло дало возможность повысить точность оценивания погрешностей исследуемого критерия на 5…7 %.

Таким образом, открытым остается вопрос разработки критерия, учитывающего закон распределения аргумента и дающий надежные результаты для всех широкого круга функциональных зависимостей.

Литература: 1.*Рабинович С.Г.* Погрешности измерений. Л.: Энергия. 1978. – 262 с. 2.*Грановский В.А., Сирая Т.Н.* Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. Л.: Энергоатомиздат. Ленинградское отд-ние. 1990. – 288 с. 3.МИ 2083-90. ГСИ. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей. М.: Изд-во стандартов, 1991. – 29 с. 4.*Захаров И.П., Штефан Н.В*. Применение метода Монте-Карло для реализации алгоритмов статистической обработки результатов измерительного эксперимента //Український метрологічний журнал. 2004. №1. С. 8-14. 5. *Захаров И.П., Штефан Н.В.* Трансформация законов распределения погрешностей при нелинейном преобразовании// Радиотехника (Харьков). 2000. Вып. 113. С. 58-61.

Поступила в редколлегию 00.00.00

Захаров Игорь Петрович, к.т.н., доцент кафедры метрологии и измерительной техники ХНУРЭ. Научные интересы – метрологическая идентификация многопараметрических средств измерений. Адрес: 61166, г. Харьков, пр. Ленина-14, тел. 702-13-31.

Пономарева Ольга Владимировна, стажер-исследователь кафедры метрологии и измерительной техники ХНУРЭ. Научные интересы – статистическая обработка результатов измерений. Адрес: 61166, г. Харьков, пр. Ленина-14, тел. 702-13-31.

Сафарян Григорий Гагикович, аспирант кафедры метрологии и измерительной техники ХНУРЭ. Научные интересы – исследование погрешностей вычислительных операций при цифровой обработке сигналов. Адрес: 61166, г. Харьков, пр. Ленина-14, тел. 702-13-31.

Сергиенко Марина Петровна, аспирант кафедры метрологии и измерительной техники ХНУРЭ. Научные интересы - динамические измерения. Адрес: 61166, г. Харьков, пр. Ленина-14, тел. 702-13-31.

УДК 621.317

Дослідження границь застосування методу лінеаризації при обробці результатів непрямих вимірювань / І.П. Захаров, О.В. Пономарева, Г.Г. Сафарян, М.П. Сергієнко // АСУ та прилади автоматики. 2000. № 00. С. 00-00.

Використовуючи метод Монте-Карло, досліджено можливості застосування критерію допустимості лінеаризації нелінійних функцій для подальшої метрологічної обробки результатів вимірювань з урахуванням закону розподілу аргументів при непрямих вимірюваннях. Отримано значення похибок, що викликано використанням цього критерію, та зроблено висновки щодо можливості його застосування при плануванні та проведенні вимірювального експерименту. Дослідження було проведено на прикладах найбільш розповсюджених функцій одного аргументу.

Іл. 4. Табл. 2. Бібліогр.: 5 назв.

UDC 621.317

The research of borders of applicability of the method of linearization at processing results of indirect measurements /I.P.Zakharov, O.V. Ponomaryova, G.G. Safaryan, M.P. Sergienko // Management Information System and Devices. All-Ukr. Sci. Interdep. Mag. 2005. N 00. P. 000-000.

The given work is devoted to research by a method of Monte-Carlo of a applicability of the method of linearization at processing results of indirect measurements.

Fig. 4. Tab. 2. Ref.: 5 items

Методом Монте-Карло исследованы возможности применения критерия допустимости линеаризации нелинейных функций для последующей метрологической обработки результатов измерений с учетом закона распределения аргументов при косвенных измерениях. Получены значения погрешностей, вызванных применением этого критерия и сделаны выводы о возможности его использования при планировании и проведении измерительного эксперимента. Исследования проводились на примерах наиболее распространенных функциях одного аргумента.