



ДИНАМИКА ЧАСТИЦ С УЧЕТОМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА ПРИ ТРАНСПОРТОВКЕ В УСКОРИТЕЛЯХ

ЧЕРНЫШОВ Н.Н.

Рассматриваются вопросы эмиссии электронов, движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях и движение электронных потоков с учетом пространственного заряда. Описывается электростатическое управление электронными потоками. Работа посвящена волнам в электронных потоках и взаимодействию высокочастотных волн с электронами.

Введение

Вакуумная и газоразрядная электроника – это раздел физической электроники, изучающий закономерности процессов эмиссии заряженных частиц, их движение в вакууме и газовой среде при различных комбинациях воздействующих на частицы внешних электрических и магнитных полей. Такие исследования привлекают особое внимание в связи с широким использованием потоков электронов и ионов в электронике и физике. В этих системах электронный поток является основным рабочим инструментом. Влияние взаимодействия между частицами оказывается фактором, приводящим не только к статическим изменениям, но и к появлению динамических зависимостей, возбуждению электромагнитных волн и изменению структуры потока. *Целью* работы является математическое моделирование физических явлений, протекающих в электронных потоках. *Задачи:* построение математической модели для определения траектории движения заряженных частиц, расчет однородного электрического поля в исследуемой системе, вывод уравнения движения заряженной частицы в неоднородном аксиально-симметричном поле.

1. Траектории движения заряженных частиц

Траектории движения заряженных частиц в статических полях определяются ориентацией вектора скорости частицы относительно направлений векторов напряженности, пространственной структурой поля, зарядом и массой частицы. Основой анализа является уравнение движения (второй закон Ньютона) частицы

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}; \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - (\vec{v}/c)^2}}, \quad (1)$$

где m_0 – масса частицы; \vec{v} – скорость.

Сила Лоренца $\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}(\vec{v} \times \vec{B})$. Напряженность поля \vec{E} включает в себя внешнее поле \vec{E}_0 и поле, обусловленное взаимным влиянием частиц (кулоновское взаимодействие), или поле пространственного заряда $E_{пз}$ [1].

2. Движение частицы в однородном поле

Рассмотрим задачу о движении частицы с зарядом q и массой m_0 , влетающей в область однородного электрического поля с напряженностью

$$\vec{E}_0 = \vec{i}E_{0x} + \vec{j}E_{0y} + \vec{k}E_{0z}. \quad (2)$$

В этом случае уравнение (1) записывается в виде

$$m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{i}E_{0x} + \vec{j}E_{0y} + \vec{k}E_{0z}). \quad (3)$$

При $\vec{B} = E_{пз} = 0$, $x > 0$ величины E_{0x} , E_{0y} , E_{0z} постоянны. Векторное уравнение (3) приводит к скалярным

$$\begin{cases} m_0 \ddot{x} = qE_{0x}; \\ m_0 \ddot{y} = qE_{0y}; \\ m_0 \ddot{z} = qE_{0z}. \end{cases} \quad (4)$$

Слева стоят вторые производные по времени $\frac{d^2}{dt^2}$, решения которых имеют вид [2]

$$\xi = \frac{qE_{0\xi}}{m_0} \times \frac{t^2}{2} + A_\xi t + B_\xi,$$

а коэффициенты A_ξ и B_ξ определяются в точке

$$\begin{aligned} \xi|_{t=0} = 0, \frac{dx}{dt} = v_0, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 0 \rightarrow \\ \rightarrow B_\xi = A_y = A_z = 0, A_x = v_0. \end{aligned}$$

Движение частицы описывается уравнениями

$$\begin{cases} x = v_0 t + \frac{qE_{0x} t^2}{2}; \\ y = \frac{qE_{0y} t^2}{2}; \\ z = \frac{qE_{0z} t^2}{2}. \end{cases} \quad (5)$$

Исключив время t , получаем уравнение траектории

$$x = \frac{E_{0x}}{E_{0y}} y + v_0 \sqrt{\frac{2m_0 y}{qE_{0y}}}, \quad (6)$$

Траектория частицы представляет параболу (рис.1).

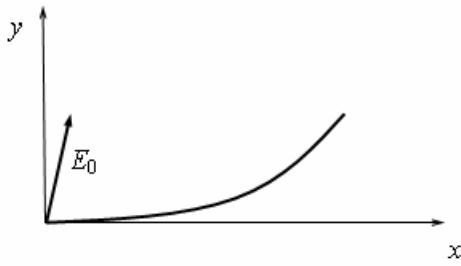


Рис. 1. Траектория частицы в однородном электрическом поле при $q > 0$

Если изменить направление поля \vec{E}_0 так, чтобы E_{0y} было отрицательным (рис.2), то частица с отрицательным зарядом пойдет вверх, а с положительным - вниз. Частица движется с ускорением вдоль оси $0x$, если $q > 0$, и с замедлением, если $q < 0$ [3].

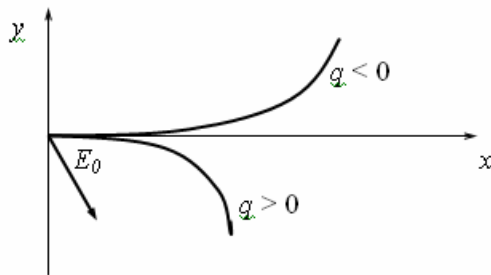


Рис.2. Траектории движения частиц в однородном электрическом поле при изменении знака E_y

Этот случай можно использовать для ускорения частиц. Если $E_{0x} = 0$, то уравнение (6) имеет вид

$$y = \frac{q}{2m} \frac{E_{0y} x^2}{v_0^2}. \quad (7)$$

3. Движение частицы в неоднородном поле

Если частица попадает в неоднородное электростатическое поле, изменяющееся вдоль направления движения, ее траектория изменяется.

3.1. Аксиально-симметричные поля

При определении структуры электростатического поля воспользуемся уравнением Лапласа для потенциала $\Delta U = 0$, где оператор Лапласа [4]

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (8)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде разложения в ряд по степеням r [5]:

$$U(r, z) = U_0(z) + r^2 U_2(z) + r^4 U_4(z) + \dots, \quad (9)$$

четность ряда обусловлена аксиальной симметрией.

Первый член $U_0(z)$ характеризует распределение потенциала вдоль оси симметрии. Решение в виде (9) имеет место, если оно удовлетворяет уравнению (8). Для определения этого решения запишем [6]

$$\Delta U = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \quad (10)$$

и подставим соответствующие производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \ddot{U}_0(z) + r^2 \ddot{U}_2(z) + r^4 \ddot{U}_4(z) + \dots; \\ \frac{\partial U}{r \partial r} = 2U_2(z) + 4r^2 U_4(z) + 6U_6(z) + \dots; \\ \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = 2U_2(z) + 12r^2 U_4(z) + 30U_6(z) + \dots \end{cases} \quad (11)$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$[\ddot{U}_0(z) + 4U_2(z)] + r^2 [\ddot{U}_2(z) + 16U_4(z)] + r^4 [\ddot{U}_4(z) + 36U_6(z)] + \dots = 0.$$

Получаем рекуррентные соотношения [7,8]

$$\begin{cases} U_2(z) = -\frac{1}{4} U_0''(z) = \frac{(-1)^1 U_0''(z)}{2^2 \times 1}; \\ U_4(z) = -\frac{1}{64} U_0''''(z) = \frac{(-1)^2 U_0''''(z)}{2^4 (1 \times 2)^2}; \\ U_{2n}(z) = (-1)^n \frac{U_0^{2n}(z)}{2^{2n} \times (n!)^2}. \end{cases} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (9), находим выражение для распределения потенциала [9,10]

$$\begin{aligned} U(r, z) &= U_0(z) - r^2 \frac{U_0''(z)}{4} + r^4 \frac{U_0''''(z)}{64} - \dots, \quad 0! = 1 \rightarrow \\ &\rightarrow U(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n U_0^{2n}(z)}{(n!)^2} \left(\frac{r}{2} \right)^{2n}. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнение (13) позволяет рассчитывать симметричные поля, если известно распределение потенциала на оси. Рассмотрим поле при малых r . Пренебрегая членами порядка малости r^4 и выше, получаем [11]

$$U(r, z) = U_0(z) - \frac{r^2}{4} U_0''(z). \quad (14)$$

Разложим $U_0(z)$ в ряд Тейлора вблизи точки z_0 :

$$U_0(z) = U_0(z_0) + \dot{U}_0(z_0) \Delta z + \frac{1}{2} \ddot{U}_0(z_0) (\Delta z)^2 + \dots$$

Тогда распределение потенциала вблизи оси

$$U(r, z) = U_0(z) + \dot{U}_0(z) \Delta z + \frac{(\Delta z)^2}{2} \ddot{U}_0(z) - \frac{r^2}{4} \ddot{U}_0(z). \quad (15)$$

Вдоль поверхности $U(r, z) = U_0(z)$ получим уравнение эквипотенциальной поверхности, проходящей через искомую точку [12]:

$$\frac{r^2}{4} \ddot{U}_0(z) = \frac{1}{2} \ddot{U}_0(z) (\Delta z)^2 + \dot{U}_0(z) \Delta z, \quad (16)$$

которое представляет собой уравнение гиперболы. Вблизи оси симметрии электрического поля эквипотенциальные поверхности представляют гиперболами

ды вращения. Если представить кривую параметрической зависимостью $r = r(z)$, то радиус кривизны

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2r}{dz^2}}, \quad (17)$$

так как вдоль эквипотенциала [13,14]

$$U(r, z) = U_0(z) = \text{const} \rightarrow \\ \rightarrow dU = \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial r} dr, \frac{dr}{dz} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial r}}{\frac{\partial U}{\partial z}}.$$

Второе дифференцирование по z приводит к

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{2 \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2}{\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2};$$

$$\begin{cases} z = z_0, \frac{\partial U}{\partial r} = 0, r = 0; \frac{\partial U}{\partial z} = \dot{U}_0(z_0); \\ \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = -\frac{1}{2} \ddot{U}_0(z_0); \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} = 0; \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \ddot{U}_0(z_0). \end{cases} \rightarrow R = \frac{2\dot{U}_0(z_0)}{\ddot{U}_0(z_0)}. \quad (18)$$

Если в точке z_0 выполняется $\dot{U}_0(z_0) = 0$, то потенциал [15]

$$U(r, z) = U_0(z_0) + \frac{1}{2}(\Delta z)^2 \ddot{U}_0(z) - \frac{r^2}{4} \ddot{U}_0(z).$$

Коэффициенты при r^2 и Δz^2 имеют противоположные знаки. Если $\ddot{U}_0(z) > 0$, то с ростом $|\Delta z|$ $U_0(r, z)$ - растёт, а с ростом $|r|$ - убывает.

3.2. Уравнение движения заряженной частицы в аксиально-симметричном поле

Уравнение движения заряженных частиц в аксиально-симметричном электростатическом поле [16]

$$\begin{cases} m_0 \ddot{z} = -q \dot{U}_0(z); \\ m_0 \ddot{r} = q \frac{r}{2} \ddot{U}_0(z). \end{cases} \quad (19)$$

Электростатическое поле связано с потенциалом

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r}; E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

В приосевой области продольная скорость частицы определяется из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = -qU:$$

$$v \approx v_0 = \frac{dz}{dt} = \sqrt{-\frac{q}{m_0} U_0(z)}. \quad (20)$$

Используя (20), получаем уравнение траектории. Преобразуем дифференциальный оператор

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} = \frac{d}{dz} \frac{dz}{dt} = \sqrt{-2 \frac{q}{m_0} U_0(z)} \frac{d}{dz}; \\ \frac{d}{dt} = \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz} \left(\frac{dz}{dt} \frac{d}{dz}\right) = -2 \frac{q}{m_0} \sqrt{U_0(z)} \frac{d}{dz} \left(\sqrt{U_0(z)} \frac{d}{dz}\right). \end{cases}$$

Получим

$$\frac{d}{dz} \left(\sqrt{U_0(z)} \frac{dr}{dz}\right) = -\frac{1}{4} \frac{\ddot{U}_0(z)}{\sqrt{U_0(z)}}. \quad (21)$$

Выводы

Научная новизна исследования заключается в разработке математической и компьютерной модели для изучения динамики заряженных частиц.

Практическое значение:

Анализ уравнения (21) позволяет охарактеризовать траектории движения частиц.

Изменение знака $U_0(z)$ не изменяет уравнения (21), и частицы при $-U_0(z)$ будут лететь по тем же траекториям в обратном направлении.

Уравнение (21) однородно относительно R . При введении новой координатной зависимости $R = A \times r$, где A – постоянная величина, вид уравнения не изменится, а форма траектории остается неизменной.

Уравнение (21) однородно относительно потенциалов. Если изменить потенциал $U_0(z)$ на величину $\Phi_0(z) = B \times U_0(z)$, где B – постоянная величина, то траектории частиц останутся исходными. Это позволяет моделировать траектории при небольших величинах потенциалов.

Перспективы исследования: разработанные модели рекомендуется использовать в ускорительной технике, но для этого необходимо сделать расчеты магнитной и ВЧ-системы.

Литература: 1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля - 4-е изд., испр. и доп. М.: Физматлит, 1962. 423с. 2. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики: Уч.пособие для вузов. М.: Наука, Физматлит, 1983. 643с. 3. Фукс Б.А., Шабат Б.Ф. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. М.: Наука, 1964. 388с. 4. Шимони

- К. Физическая электроника. М.: Энергия, 1977. 608с. **5.** Лоусон Дж. Физика пучков заряженных частиц: Пер. с англ. Под ред. А.А.Коломенского. М.: Мир, 1980. 439с. **6.** Бронштейн И.М., Фрайман Б.С. Вторичная электронная эмиссия. М.: Наука, 1969. 287с. **7.** Зинченко Н.С. Курс лекций по электронной оптике: Уч.пособие для вузов. Харьков: ХГУ, 1958. 275с. **8.** Жигарев А.А. Электронная оптика и электронно-лучевые приборы: Учеб. пособие для вузов. М.: Высш.шк., 1972. 540с. **9.** Алямовский И.В. Электронные пучки и пушки. М.: Сов. радио, 1966. 454с. **10.** Клейнер Э.Ю. Основы теории электронных ламп: Уч.пособие для вузов. М.: Высш.шк., 1974. 368с. **11.** Грибов Л.А., Прокофьева Н.И. Основы физики: Учебник для вузов. М.: Наука, Физматлит, 1988. 560с. **12.** Суханов А.Д. Фундаментальный курс физики: Уч. пособие для вузов. В 4-х т. Т.1 Корпускулярная физика. М.: Издательство "Агар", 1996. **13.** Годжаев Н.М. Оптика: Учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк, 1977. 432с. **14.** Трофимова Т.И. Курс физики: Уч. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 1998. 542с. **15.** Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т.1. М.: Ин. лит., 1958. 931с. **16.** Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: Уч. для вузов. М.: Наука, Физматлит, 1988. 224с.

Поступила в редколлегию 11.04.2012

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. Панченко А.Ю.;

д-р физ.-мат. наук, проф. Лучанинов А.И.

Чернышов Николай Николаевич, канд. техн. наук, старший научный сотрудник кафедры микроэлектроники электронных приборов и устройств ХНУРЭ. Научные интересы: математическая физика; методы математического анализа; численное моделирование; задачи теории поля, солнечной и ядерной энергетики. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр.Ленина, 14. тел.: (057) 7021362, (093) 0436635.