УДК 517.95:519.63

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ (ПРИБЛИЖЕНИЕ СТОКСА) МЕТОДАМИ R-ФУНКЦИЙ И ГАЛЕРКИНА

АРТЮХ А.В., СИДОРОВ М.В.

Рассматривается задача расчета нестационарного плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости в конечной односвязной области в приближении Стокса. Для описания течения используется уравнение для функции тока. На основании метода R-функций и проекционного метода (метод Галеркина) строится приближенный метод решения этой задачи. Эффективность разработанного численного метода иллюстрируется вычислительными экспериментами.

Введение

Актуальность задачи. Изучение законов движения жидкости играет важную роль в развитии техники и естествознания. Исследования в этой области стимулируются потребностями авиации, кораблестроения, теплоэнергетики, геофизики, биологии и пр. За последние десятилетия сфера исследования и применения явлений, связанных с движением жидкости, постоянно расширяется и охватывает ведущие направления промышленности (химические технологии, нефте- и газоразработка, металлургия и т. д.) и ряд естественных наук (биология, физика атмосферы и океана и др.). Во многих практически важных случаях жидкость можно с большой достоверностью считать вязкой несжимаемой ньютоновской средой, и проходящие в ней процессы могут быть промоделированы с помощью уравнений Навье-Стокса [1, 2]. Различные задачи, возникающие при изучении динамики вязкой жидкости, могут быть исследованы теоретическим путем или с помощью физического эксперимента. Однако с развитием ЭВМ все активнее используется математическое моделирование. Существует множество численных методов, применяемых при расчете вязких течений. Литература по этому направлению обширна [3-5 и др.]. В основном эти численные методы используют метод конечных разностей и метод конечных элементов. Они просты в реализации, но не обладают необходимым свойством универсальности – при переходе к новой области (особенно неклассической геометрии) необходимо генерировать новую сетку, а часто и заменять сложные участки границы простыми, составленными, например, из отрезков прямых. Точно учесть геометрию области можно, воспользовавшись конструктивным аппаратом теории R-функций, разработаной акад. В.Л. Рвачевым и его учениками [6,7 и др.]. Задачи гидродинамики решались в работах С.В. Колосовой, К.В. Максименко-Шейко, И.Г. Суворовой, Т.И. Шейко, М.В. Сидорова и др. [8-11, 17]. Однако в основном рассматривались задачи динамики идеальной или вязкой жидкости для случаев стационарного течения, когда можно построить решение с помощью удачного выбора координат (осесимметрические течения, течения, обладающие винтовой симметрией, и т. п.). Поэтому разработка новых, а также совершенствование существующих методов математического моделирования нестационарных течений вязкой жидкости на основе метода R-функций и проекционных методов является актуальной научной проблемой.

Цели и задачи исследования. Целью настоящего исследования является разработка новых средств математического моделирования и численного анализа нестационарных плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях в приближении Стокса на основании методов R-функций и Галеркина. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

– получить полную структуру решения начально-краевой задачи для функции тока, используя метод R-функций;

– разработать и обосновать алгоритм аппроксимации неопределенной компоненты полученной структуры на основании метода Галеркина;

– провести вычислительные эксперименты.

1. Постановка задачи

Нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости описывается хорошо известными уравнениями Навье-Стокса [1]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{v} \qquad (1)$$

и уравнением неразрывности

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0 \,. \qquad (2)$$

Здесь $\vec{v}$ – поле скоростей; p – давление; ν – кинематическая вязкость; ρ – плотность. Будем предполагать, что объемные силы отсутствуют.

Решение системы (1), (2) сопряжено со значительными трудностями, связанными, в основном, с присутствием в (1) нелинейного члена $(\vec{v}\nabla)\vec{v}$.

Для достаточно медленного (ползущего) течения отношение порядка конвективных сил инерции к порядку сил вязкости малым и нелинейным членом в (1) можно пренебречь. При этом мы получим линеаризованные по Стоксу уравнения вязкой несжимаемой жидкости.

Достаточно широкий класс течений может быть сведен к двумерным течениям. Далее будем рассматривать плоскопараллельные течения, когда область, в которой изучается течение, является цилиндрической, а краевые и начальные данные не зависят от координаты оси цилиндра.

В приближении Стокса уравнения нестационарного плоскопараллельного движения вязкой несжимаемой жидкости в конечной односвязной области Ω плоскости xOy имеют вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right), \qquad (3)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 .$$

Анализ плоскопараллельных течений удобно производить с помощью функции тока $\psi(x, y)$, вводимой соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

(уравнение неразрывности при этом обращается в тождество).

Исключая из (3) дифференцированием давление, для функции тока получаем уравнение

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} = \nu\Delta^2\psi .$$

Начальные и краевые условия для функции тока могут быть получены из условий, накладываемых на вектор $\vec{v}$. Так, если жидкость примыкает к неподвижной стенке, то в этих точках скорость жидкости обращается в нуль. Это означает, что в нуль обращается нормальная и тангенциальная составляющая скорости (условие прилипания). Если же жидкость примыкает к подвижной твердой стенке, то в таких точках скорость жидкости должна по величине и направлению совпадать со скоростью соответствующей точки стенки. Исходя из этого, на границе $\partial\Omega$ области Ω можно задать значение функции тока ψ и её нормальной производной $\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}$, где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Итак, для функции тока $\psi(x, y)$ можно поставить начально-краевую задачу

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} = \nu\Delta^2\psi, \ (x, y) \in \Omega, \ t > 0, \qquad (4)$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = f_0(s,t), \ \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = g_0(s,t), \ s \in \partial\Omega, \ t \ge 0, \quad (5)$$

$$\psi\big|_{t=0} = \psi_0(x, y), \ (x, y) \in \overline{\Omega}. \qquad (6)$$

Методика задания функций $f_0(s,t)$ и $g_0(s,t)$ рассмотрена в [15].

2. Применение методов R-функций и Галеркина

Для решения начально-краевой задачи (4) – (6) используем методы R-функций и Галеркина.

Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω кусочно-гладкая и может быть описана элементарной функцией $\omega(x, y)$ согласно методу R-функций [6], причем функция $\omega(x, y)$ удовлетворяет условиям:

1) $\omega(x, y) = 0$ на $\partial\Omega$;

2) $\omega(x, y) > 0$ в Ω;

3) $\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} = -1$ на $\partial\Omega$, т.е. $\omega(x, y) = 0$ – нормализованное уравнение $\partial\Omega$, $\vec{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

В работе [15] было показано, что краевым условиям (5) удовлетворяет пучок функций

$$\psi = f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2\Phi, \qquad (7)$$

где $f = EC f_0$, $g = EC g_0$ – продолжения функций f_0, g_0 в Ω соответственно,

$$D_1 v = \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = (\nabla\omega, \nabla v),$$

$\Phi = \Phi(x, y, t)$ – неопределенная компонента, которую будем предполагать достаточно гладкой.

В задаче (4) – (6) сделаем замену

$$\psi = \varphi + u ,$$

где $\varphi = f - \omega(D_1 f + g)$, u – новая неизвестная функция. Тогда для функции u получим начально-краевую задачу с однородными краевыми условиями:

$$\frac{\partial(-\Delta u)}{\partial t} + \nu\Delta^2\psi = F, \ (x, y) \in \Omega, \ t > 0, \qquad (8)$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (9)$$

$$u\big|_{t=0} = u_0, \qquad (10)$$

где $F = -\nu\Delta^2\varphi + \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial t}$, $u_0 = \psi_0 - \varphi\big|_{t=0}$.

Для решения задачи (8) – (10) применим метод Галеркина для нестационарной задачи [22].

Пусть $T > 0$, H – сепарабельное гильбертово пространство. Символом $L_2(0,T;H)$ будем обозначать множество функций $u(t)$, $t \in [0,T]$, со значениями в H таких, что

$$\int_0^T \|u(t)\|_H^2 \, dt < +\infty .$$

Это множество является сепарабельным гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$< u, v >= \int_0^T (u(t), v(t))_H \, dt .$$

Возьмем $H = L_2(\Omega)$. Пусть $u_0 \in L_2(\Omega)$, $F(t) \in$ $\in L_2(0,T;L_2(\Omega))$.

Введем в рассмотрение операторы A и B, действующие в $L_2(0,T;L_2(\Omega))$ по правилам

$$Au = \Delta^2 u, \quad Bu = -\Delta u$$

на областях определения

$$D_A = \left\{ u \mid u \in C^4(\Omega) \bigcap C^1(\bar{\Omega}),\ u\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$D_A = \left\{ u \mid u \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\bar{\Omega}),\ u\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Можно доказать [19], что операторы A и B будут положительно определены. Ясно, что $D_A \subset D_B$.

Тогда задачу (8) – (10) можно записать в операторной форме

$$\frac{d}{dt} Bu + \nu Au = F, \quad (x,y) \in \Omega, \quad t > 0, \tag{11}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0. \tag{12}$$

На D_A введем энергетическое произведение $[u,v]_A$ по правилу: для любых $u, v \in D_A$

$$[u,v]_A = (Au, v)_{L_2(\Omega)} = \iint\limits_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v \, dxdy,$$

а соответствующая энергетическая норма

$$\|u\|_A^2 = \iint\limits_{\Omega} (\Delta u)^2 \, dxdy.$$

Пополняя D_A в норме $\|u\|_A$, получаем энергетическое пространство H_A оператора A.

На D_B введем энергетическое произведение $[u,v]_B$ по правилу: для любых $u, v \in D_B$

$$[u,v]_B = (Bu, v)_{L_2(\Omega)} = \iint\limits_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dxdy.$$

Применяя формулу Грина [19] и учитывая краевые условия, получаем

$$[u,v]_B = (Bu, v)_{L_2(\Omega)} = \iint\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dxdy,$$

а соответствующая энергетическая норма

$$\|u\|_B^2 = \iint\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dxdy.$$

Пополняя D_B в норме $\|u\|_B$, получаем энергетическое пространство H_B оператора B.

Можно показать, что $H_A = \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega) \subset H_B$.

Пусть $u(t)$ – классическое решение задачи (11), (12), т.е. для любого $t \geq 0$ $u(t) \in D_A$, $u(t)$ непрерывно дифференцируема по t, удовлетворяет уравнению (11) и начальному условию (12).

Пусть $v(t)$ – достаточно гладкая в $\bar{\Omega} \times [0, +\infty)$ функция, удовлетворяющая краевым условиям (9) и такая, что при некотором $T > 0$ $v(T) = 0$. Умножим (11) скалярно в $L_2(\Omega)$ на произвольную функцию $v(t)$ с указанными свойствами:

$$\left(\frac{d}{dt} Bu, v\right)_{L_2(\Omega)} + \nu \left(Au, v\right)_{L_2(\Omega)} = (F, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Интегрируя последнее равенство по t от 0 до T, получаем, что

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt} Bu, v\right)_{L_2(\Omega)} dt + \nu \int_0^T \left(Au, v\right)_{L_2(\Omega)} dt = \int_0^T (F, v)_{L_2(\Omega)} dt.$$

Если проинтегрировать первый интеграл по частям (по переменной t) и воспользоваться равенством $v(T) = 0$, то получим, что

$$-(Bu_0, v(0))_{L_2(\Omega)} - \int_0^T \left(Bu, \frac{\partial v}{\partial t}\right)_{L_2(\Omega)} dt + \nu \int_0^T \left(Au, v\right)_{L_2(\Omega)} dt =$$

$$= \int_0^T (F, v)_{L_2(\Omega)} dt.$$

Учитывая вид энергетических произведений в H_A и H_B, последнее равенство перепишем в виде

$$-\int_0^T \left[u, \frac{\partial v}{\partial t}\right]_B dt + \nu \int_0^T [u,v]_A \, dt =$$

$$= [u_0, v(0)]_B + \int_0^T (F, v)_{L_2(\Omega)} dt. \tag{13}$$

Последнее равенство возьмем в качестве определения обобщенного (слабого) решения задачи (11), (12) (а значит, задачи (8) – (10)).

Обозначим множество функций

$$W_T = \{u \mid u \in L_2(0,T;H_A),$$

$$u' \in L_2(0,T;L_2(\Omega)),\ u(T) = 0\}.$$

Определение. Функция $u(t)$ называется обобщенным (слабым) решением задачи (11) – (12), если

а) $u(t) \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega))$;

б) для любого элемента $v(t) \in W_T$ имеет место равенство (13).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $F(t) \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$ *и* $u_0 \in H_B$. *Тогда существует, и притом единственное, обобщенное решение задачи* (11), (12).

Для построения обобщенного решения задачи (11) – (12) воспользуемся методом Галеркина [22]. Приближенное решение задачи (11) – (12) ищем в виде

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\varphi_k , \qquad (14)$$

где $c_k(t)$, $k = 1,...,n$ – неизвестные пока функции, $\{\varphi_k\}$ – координатная последовательность, т.е. последовательность $\{\varphi_k\}$ удовлетворяет условиям:

1) для любого k $\varphi_k \in H_A$;

2) для любого n $\varphi_1,...,\varphi_n$ линейно-независимы;

3) $\{\varphi_k\}$ полна в H_A.

Поскольку из (7) следует, что $u = \omega^2\Phi$, где $\Phi = \Phi(x,y,t)$ – неопределенная компонента структуры, то координатную последовательность можно взять в виде $\varphi_k = \omega^2\tau_k$, где $\{\tau_k\}$ – любая полная в $L_2(\Omega)$ система функций.

В соответствии с методом Галеркина неизвестные функции $c_k(t)$, $k = 1,...,n$, найдем из условия ортогональности невязки, получаемой при подстановке (14) в уравнение (11), первым n координатным функциям $\varphi_1,...,\varphi_n$. Это приводит для определения $c_k(t)$, $k = 1,...,n$, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{c}_k(t)[\varphi_k,\varphi_j]_B + \nu\sum_{k=1}^{n} c_k(t)[\varphi_k,\varphi_j]_A =$$

$$= (F,\varphi_j)_{L_2(\Omega)}, \ j = 1,2,...,n . \qquad (15)$$

Систему (15) нужно дополнить начальными условиями

$$c_k(0) = c_k^0, \ k = 1,2,...,n . \qquad (16)$$

Начальные условия (16) можно задать различными способами [22], например, решением системы алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} c_k(0)(\varphi_k,\varphi_j)_{L_2(\Omega)} = (u_0,\varphi_j)_{L_2(\Omega)}, \ j = 1,2,...,n , \qquad (17)$$

которая получается из условия ортогональности невязки начальных условий (12) первым n координатным функциям $\varphi_1,...,\varphi_n$.

В силу условий, наложенных на координатную последовательность $\{\varphi_k\}$, система (17) и задача Коши (15), (16) при любом n имеет единственное решение.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Приближенные решения* $u_n(t)$ *задачи* (11) – (12), *построенные по методу Галеркина, определены однозначно при любом* n, *причем*

$$u_n(t) \to u(t), \ n \to \infty, \text{ слабо в } L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)),$$

где $u(t)$ – обобщенное решение задачи (11), (12).

3. Результаты вычислительного эксперимента

Рассмотрим задачу (4) – (6) для прямоугольной области $\Omega = \{(x,y) | 0 < x < 1, \ 0 < y < 1\}$ со следующими краевыми условиями:

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} = \nu\Delta^2\psi , \ (x,y) \in \Omega , \ t > 0 ,$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0 , \ \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & y = 1; \\ 0, & x = 0, y = 0, x = 1. \end{cases} , \ \psi\big|_{t=0} = 0 .$$

Решение поставленной задачи найдено с помощью методов R-функций и Галеркина. В структуре решения (7) нормализованное уравнение Ω имеет вид

$$\omega(x,y) \equiv [x(1-x)] \wedge_\alpha [y(1-y)] = 0 ,$$

где $\wedge_\alpha$ – R-конъюнкция [6].

В качестве базисных функций выбирались степенные полиномы, тригонометрические полиномы, полиномы Лежандра. При вычислении интегралов в скалярных произведениях в системах (15) и (17) использовалась формула Гаусса с 16 узлами по каждой переменной.

На рис. 1 – 4 построены линии уровня функции тока.

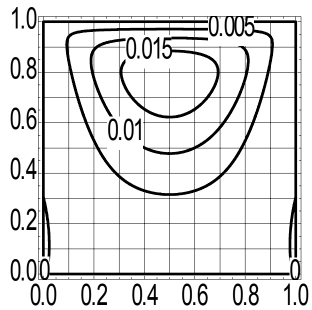

Рис. 1. Линии уровня функции тока при $t = 0,2$

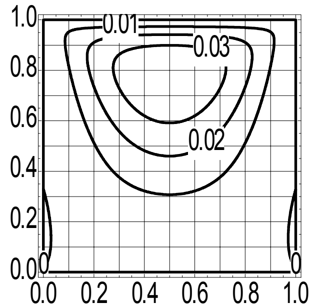

Рис. 2. Линии уровня функции тока при $t = 0,5$

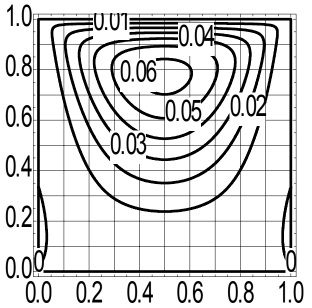

Рис. 3. Линии уровня функции тока при $t = 1$

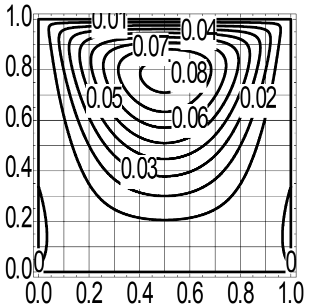

Рис. 4. Линии уровня функции тока при $t = 1,8$

На рис. 5 – 8 приведены линии уровня вихря $\zeta = -\Delta\psi$ в разные моменты времени.

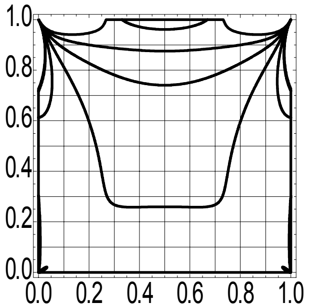

Рис. 5. Линии уровня вихря при $t = 0,2$

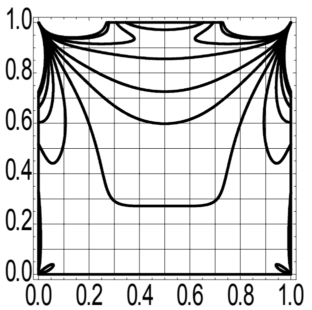

Рис. 6. Линии уровня вихря при $t = 0,5$

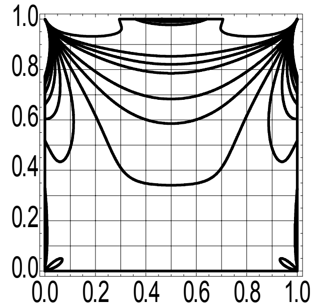

Рис. 7. Линии уровня вихря при $t = 1$

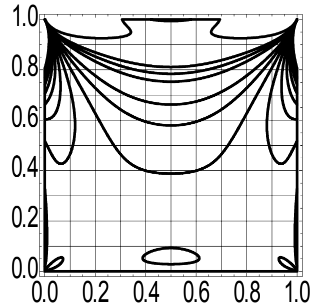

Рис. 8. Линии уровня вихря при $t = 1,8$

На рис. 9 показан график изменения $\max\limits_{(x,y)\in\bar{\Omega}} \psi(x, y, t)$. Как видно, в задаче существует стационарный режим.

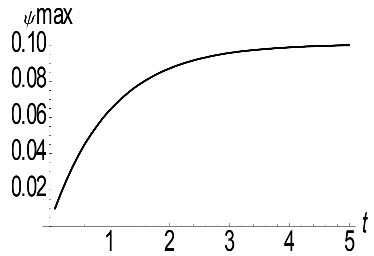

Рис. 9. Изменение максимума функции тока по времени

На рис. 10 приведены значения скорости $-\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{y=0,5}$ в разные моменты времени.

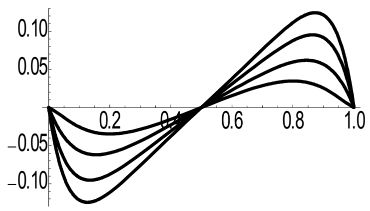

Рис. 10. Профиль скорости $-\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{y=0,5}$ в разные моменты времени $t = 0,2;\ 0,5;1;1,8$

Полученные результаты хорошо согласуются с результатами физических экспериментов [1, 2] и результатами, полученными другими авторами. Расхождения составили около 3%.

Выводы

Построен алгоритм решения задачи численного моделирования на основе метода R-функций и Галеркина. Это дало возможность, в отличие от сеточных методов, получить выражение для функции тока в аналитическом виде, что существенно облегчает ее последующее использование. Численное моделирование было проведено для прямоугольной области. Для конкретной задачи проводится сравнение полученного приближенного решения с приближенными решениями, полученным другими авторами. Сделан вывод об эффективности предложенного метода решения.

Научная новизна полученных результатов заключается в том, что впервые разработан алгоритм решения задачи математического моделирования и численного анализа нестационарных плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях в приближении Стокса на основании методов R-функций и Галеркина, который не изменяется при изменении геометрии области, что позволило получить приближенное решение задачи расчета этого класса течений в областях неклассической геометрии.

Практическая значимость полученных результатов. Разработанные методы расчета плоских течений вязкой жидкости в односвязных областях являются простыми в алгоритмизации и более универсальными, чем используемые в данное время, поскольку при переходе от одной области к другой требуется лишь изменить уравнение границы. Полученные результаты позволяют проводить вычислительные эксперименты во время математического моделирования различных физико-механических, биологических течений. Также решение задачи Стокса может быть использовано как начальное приближение для решения полных уравнений Навье-Стокса.

Литература: 1. *Ландау Л.Ф., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2003. 736 с. **2.** *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с. **3.** *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с. **4.** *Donea J., Huerta A.* Finite Element Methods for flow problems. London: Wiley, 2003. 350 p. **5.** *Zienkiewicz O.C., Taylor R. L.* The finite Element Method. Vol. 3: Fluid Dinamics. Oxford: BH, 2000. 334 p. **6.** *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. **7.** *Колодяжный В.М., Рвачев В.А.* Структурное построение полных последовательностей координатных функций вариационного метода решения краевых задач: Препр. АН УССР. Ин-т пробл. машиностр. Харьков, 1975. 75 с. **8.** *Суворова И.Г.* Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы // Вестн. НТУ ХПИ. Харьков, 2004. №31. С. 141–148. **9.** *Колосова С.В.* Об обтекании невязкой жидкостью цилиндра в трубе // Прикл. мех., 1971. №7. Вып. 10. С. 100-105. **10.** *Максименко-Шейко К.В.* Исследование течения вязкой несжимаемой жидкости в скрученных каналах сложного профиля методом R-функций // Проблемы машиностроения, 2001. Т. 4, № 3 – 4. С. 108 – 116. **11.** *Рвачев В. Л., Корсунский А.Л., Шейко Т.И.* Метод R-функций в задаче о течении Гартмана // Магнитная гидродинамика. 1982. № 2. С. 64 – 69. **12.** *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Мир, 1972. 588 с. **13.** *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных задач. М.: Мир, 1972. 588 с. **14.** *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408с. **15**. *Сидоров М. В.* О построении структур решений задачи Стокса // Радиоэлектроника и информатика. 2002. № 3. С. 52 – 54. **16.** *Сидоров М.В.* Применение метода R-функций к расчету течения Стокса в квадратной каверне при малом числе Рейнольдса // Радиоэлектроника и информатика. 2002. № 4. С. 77 – 78. **17.** *Колосова С.В., Сидоров М.В.* Применение метода R-функций // Вісн. ХНУ. Сер. Прикл. матем. і мех. 2003. № 602. С. 61 – 67. **18.** *Слободецкий Л.Н.* Обобщение пространства С.Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. //Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А.И. Герцена. 1958. Т. 197. С. 54 – 112. **19.** *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с. **20.** *Федотова Е.А.* Атомарная и сплайн-аппроксимация решений краевых задач математической физики: Дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. Харьков, 1985. 170 с. **21.** *Федотова Е.А.* Практические указания по использованию сплайн-аппроксимации в программирующих системах серии «Поле»: Препр. АН УССР. Ин-т пробл. машиностр.;202. Харьков, 1984. 60 с. 22. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с

Поступила в редколлегию 24.08.2011

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Колосов А.И.

Артюх Антон Владимирович, аспирант, ассистент кафедры Прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, математическая физика, численные методы. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-14-36.

Сидоров Максим Викторович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры Прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, математическая физика, теория R-функций и ее приложения. Увлечения и хобби: история культуры. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-14-36.