**К РАСЧЕТУ МАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ ЭРГОТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

Наумейко И.В., Сова А.В.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

61166, Харьков, пр. Ленина, 14, каф. Прикладной математики, тел. (057) 702-14-36,

E-mail: [naum@kture.kharkov.ua](mailto:naum@kture.kharkov.ua); факс (057) 702-11-13

The closed “Man-machine-environment” system with non-stable source of catastrofical events with unknown densities is considered. The Markovian model is presented with its parameters found using informational entropy minimization principle. Numerical minimization process has found a great lot of local minima-points.

**Введение**

Рассматривается замкнутая система типа «человек-машина-среда», в которой имеется стационарный источник событий-катастроф, влияющих на работу подсистемы «машина» и здоровье подсистемы «человек», задача которого эту катастрофу ликвидировать. В отличие от стандартного подхода, интенсивности событий не известны и определяются из условия максимума информационной энтропии замкнутой стационарной эргодической системы.[1]

**1. Постановка проблемы в общем виде**

Следует построить Марковскую модель, рассмотреть уравнения Колмогорова для переходного процесса и соответствующую алгебраическую систему типа Эрланга для стационарного предельного случая. Расширить модель на случай «мультикатастроф» – немарковский поток со случайным количеством событий и переменной интенсивностью. Путем введения фиктивных состояний свести модель к Марковской. Во всех случаях, в качестве инструмента исследования, использовать принцип максимума энтропии, также называемый «вторым началом синергетики».

Использован подход, который можно было бы уподобить подходу термодинамики, а именно мы хотим описывать поведение сложных систем с помощью макроскопически наблюдаемых величин.Затем мы попытаемся «угадать» микроскопическую структуру процессов, порождающих макроскопическую структуру или макроскопическое поведение. Нашим орудием для достижения этой цели послужит принцип максимума энтропии или принцип максимума информационной энтропии, разработанный в совершенно общем виде Джейнсом.[4]

Начинаем с макронаблюдаемых переменных, которые могут флуктуировать и имеют известные средние значения. Эти макронаблюдаемые переменные мы различаем по индексу k и обозначаем их средние значения через fk. Затем установим распределение вероятностей pj состояний системы, которым присвоен индекс j.

Сделать это можно, если найти максимум информации

(1)

при ограничении . (2)

Ясно, что - это вклад состояния j в макропеременную, которой присвоен индекс k. Кроме того, мы требуем естественное ограничение

, (3)

Принцип максимума информационной энтропии позволяет весьма быстро и изящно вывести основные формулы термодинамики, и не только. При этом выводе все ограничения относятся к сохраняющимся величинам замкнутой системы, т.е. к энергии, числу частиц и т.п. Трудность проблемы обобщения этого принципа максимума энтропии на системы, далекие от теплового равновесия, или даже на нефизические системы, кроется именно в адекватном выборе ограничений.

**2. Подсистема «человек»**

Далее переходные вероятности, от которых зависят вероятности состояний системы, определим по макро-характеристикам объекта, которые имеют характер математических ожиданий (суммирование ведется по *i* для каждого *j* )

∑ *p*i qij = *M*j , (4)

Используем метод максимизации информационной энтропии

SI =-∑*p*i ln *p*i, (5)

широко применяемый при исследовании динамики как замкнутых, так и неравновесных систем, и названный Хакеном «вторым началом синергетики».

Рассмотрим подсистему «человек», которая может находиться в одном из трех возможных состояний *s*1=«здоров и работоспособен», *s*2= «болен, но работоспособен», *s*3= «неработоспособен». Соответственно, критерий (3.5) есть функция трех переменных, и задача может иметь не более двух ограничений, одно из которых тривиальное и присутствует всегда: ∑*p*i=1. Для последней связи значения qij и *М* могут быть получены, например, из статистики для температуры тела: T(*s*1)=36, T(*s*2)=37.5, T(*s*3)=39.

После нормировки ограничений задача оптимизации имеет вид:

SI =-∑*p*i⋅ln *p*i → max;

∑*p*i=1, 0<*p*i<1; (6)

0.973⋅*p*1+1.013⋅*p*2+1.054⋅*p*3=1

Функция SI выпукла вверх по каждой переменной, а значит, максимум на выпуклой области единственный.

Данный модельный пример легко решить аналитически методом множителей Лагранжа, однако, при большем числе состояний, потребуется программа или математический пакет, например, Mathematica :

Получен следующий результат для энтропии и переходных вероятностей процесса: {1.01542, {p1->0.511347, p2->0.306852, p3->0.181802}}.

**3. Постановка задачи для системы «Человек-Машина-Среда»**

Требуется рассмотреть простейший случай восстановления системы после катастрофы (процесс гибели и размножения) [2,3]:

λ,µ - const.

λ

S0

S1

(7)

µ

Построить уравнение Колмогорова, рассмотреть как переходный процесс, так и предельный (стационарный) случай, найти вероятности каждого из состояний, получив простейшую формулу типа Эрланга.

Пусть надсистема замкнута, т.е. источник катастроф принадлежит надсистеме. Определить параметр  из условий максимума информационной энтропии, рассмотрев

а) стационарный случай: *pi* = const;

б) переходный процесс: ограничения в задаче оптимизации заданы двумя дифференциальными уравнениями Колмогорова и нормировкой . Здесь надо явно решить систему дифференциальных уравнений и оптимизировать, зависящую от t функцию, а от начальных условий, если зависит – положить .

Более сложный случай: сделать то же, но при условии, что интенсивность последующих катастроф уменьшается согласно геометрическому распределению:

1 2 3 … n

P QP Q2P … Qn-1P (P+Q=1). (8)

Система бесконечная. Её структурная схема изображена ниже.

λ0

λ2

λ1

(9)

µ0

S0

µ0

S1

µ0

S2

Sn

Здесь два параметра: , которые надо определить по максимуму энтропии, для чего получить формулы типа Эрланга, решить систему дифференциальных уравнений размерностью , где n – математическое ожидание геометрического распределения.

**4. Применение условий максимума информационной энтропии в** **простейшем случае восстановления системы после катастрофы**

4.1 Стационарный случай

Определяем функцию энтропии:

. (10)

С помощью функции NMaximize программы Mathematica 8.0 находим максимум функции энтропии по при условии . Рельеф функции приведен на рисунке.

4.2 Нестационарный случай

Решим линейную систему дифференциальных уравнений Колмогорова с начальными условиями при ; . С помощью программы Mathematics 8.0 определяем функцию энтропии и находим ее максимум и оптимальные параметры λ=0.964771 и µ=0.757352.

4.3 Применение условий максимума информационной энтропии

Решив систему алгебраических линейных уравнений, полученных из системы Колмогорова при условии стационарности процесса, находим максимум энтропии по λ, µ, Q при условии . Получили: , ,

4.4 Стационарный случай для «мультикатастроф»

Задаем функцию энтропии I(a,Q). Находим максимум функции при условии ; . Поверхность функции энтропии изображена на рисунке 4.4.



Поверхность функции энтропии

Далее мы находим локальные «пики», накладывая ограничения на 𝛼 . по прежнему стабильно, но на «ребре» поверхности функции энтропии мы видим небольшие «толчки».

Найденный параметр 𝛼, определяющий характер восстановления системы после катастрофы, и параметр Q, определяющий характер источника катастроф, определяются из условий максимума информационной энтропии.

**Список литературы:**

1. Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. М.: МЦНМО, 2000. — 32 с.
2. Вентцель Е.С. Исследование операцій. М.: Советское радио, 1972, 552с.
3. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания / Под редакцией Б. В. Гнеденко. М.: Физматгиз, 1963, 236 с.
4. Хакен Г. Информация и самоорганизация. М.: КомКнига, 2005, 248 с.