УДК 519.651

О.Б.НОВІКОВА

АПРОКСИМАЦІЯ ФРАКТАЛЬНИХ КРИВИХ ЗА ДОПОМОГОЮ СПЛАЙНІВ

Розглядається застосування фракталів у задачах апроксимації кривих складної форми. Описується задача статистичного оцінювання параметрів фрактальних моделей для даних, що мають потенційно сплайнову природу. Вказуються особливості побудови фрактального сплайну з лінійною залежністю від параметрів, а також особливості розрахунків методу найменших квадратів для сплайнового фракталу. Наводиться алгоритм апроксимації кривих фрактальними сплайнами. Показуються приклади апроксимації фрактальним сплайном модельних фрактальних даних з адитивною випадковою похибкою та реального часового ряду.

Вступ

Апроксимація контурів складних природних об'єктів є важливим питанням, що потребує вирішення для задач відновлення і представлення даних у різних предметних областях, зокрема таких як медичні зображення, представлення мультимедійних даних та САПР (системи автоматизованого проектування та розрахунку). Останнім часом отримали розвиток фрактальні сигнали в радіотехнічних системах та системах зв'язку [1].

Хоча фрактальні ітераційні функції були формалізовані більше, ніж десятиліття тому, їх широке застосування спостерігається лише у комп'ютерній графіці. К.Віттенбрінк [2] вперше використав фрактальні функції для позначення невизначеності у візуалізації наукових даних. Використання систем ітераційних функцій (IFS) для апроксимації кривих раніше було досліджено у [3], але не застосовано для відновлення конкретної кривої. Серед інших підходів до використання фракталів для вирішення «зворотної задачі» до інтерполяції слід відзначити роботу К.Беркнера [4], який використав вейвлет-трансформації, щоб отримати точну реконструкцію кривих. Математичними питаннями фрактальної апроксимації цікавиться український науковець Д.Ю.Мітін [5, 6]. Зв'язок фрактальної розмірності та якості апроксимації досліджує В.В.Ванін [7] тощо.

Питання побудови фрактальних кривих досліджені досить добре. Проте не менше значення має й задача апроксимації гіпотетично фрактальних сигналів і процесів фрактальними моделями. В більшості випадків - це складна процедура, часто ітераційна, нелінійної оптимізації. Це ускладнює статистичне оцінювання параметрів моделі в умовах наявності завад в даних.

Ми пропонуємо новий підхід до апроксимації фрактальних кривих з використанням фрактальних сплайнів. Метою роботи є отримання способу оцінювання параметрів фрактальних сплайнів за методом найменших квадратів. Необхідно виконати тестування моделі як на синтетичних (генерованих програмою), так і на природних (валютний курс) часових рядах.

1. Фрактальна апроксимація

Нехай маємо набір вхідних точок $\{(t_i, x_i\}_{i=0}^{N}$, де $t_0 < t_1 < ... < t_N$, N – кількість точок. Тоді апроксимуючою функцією назвемо таку неперервну функцію $F:[x_0, x_N]$, яка дозволяє представити вхідні дані з кількістю трансформацій, суттєво меншою за N. У загальному випадку вважаємо, що кількість точок даних перевищує кількість степенів свободи у представленні. Для оцінки якості фрактальної апроксимації будемо використовувати відстань Хаусдорфа. Нехай A і A' – дві скінченні множини у метричному просторі (χ, d), тоді Хаусдорфова відстань між ними визначається як:

$$d_H(A, A') = \max\left\{\max_{p\in A}(\min_{q\in A'} d(p,q)), \max_{p\in A'}(\min_{q\in A} d(p,q))\right\}. \qquad (1)$$

У випадку однакової кількості точок у множинах можна користуватися спрощеною формулою для розрахунку відстані:

$$D(A, A') = \sum_{i=0}^{N} d(A_i, A'_i) \ . \tag{2}$$

2. Фрактальні сплайни

Фрактальний сплайн – це функція, яка складається з сплайн-функцій різного масштабу, що зберігають самоподібність[8, с.162]. Як і звичайний сплайн, фрактальний сплайн характеризується ступенем, кількістю вузлів, крайовими умовами. Від фракталу він перейняв такі характеристики, як кількість масштабів і фрактальна розмірність.

Масштабом будемо називати кількість вкладених рівнів самоподібних сплайнів.

Для того аби сплайн став фракталом, необхідно, щоб кожен із R фрагментів також був сплайном, подібним до оригінального. Тоді сплайн на k-му масштабі буде складатися з R^k фрагментів. Поділ кожного фрагмента сплайну зберігає пропорцію нульового масштабу. Неперервність похідних і значень у точках стикування забезпечується, якщо сплайн періодичний, тобто значення у першому й останньому вузлах однакові.

Фрактальний сплайн нульового масштабу збігається зі звичайним сплайном тієї ж степені.

Розглянемо процес отримання фрактального сплайну k-го масштабу зі сплайну $(k-1)$-го масштабу. Нехай на нульовому масштабі маємо таку матрицю вузлів сплайну:

$$^{0}TU = [tu_{0,0}, tu_{1,0}, ..., tu_{R+1,0}], \tag{3}$$

де $tu_{i,j}$ – i-й вузол сплайну; j – масштаб, причому $tu_{0,0} = t_0$ і $tu_{R+1,0} = t_N$.

Наступне перетворення визначає матрицю вузлів на k-му масштабі:

$$\psi_k(TU) = TU * \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_1 \\ ... \\ \omega_{R+1} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

тут

$$\omega_i = \frac{tu_i - tu_{i-1}}{tu_N - tu_0}. \tag{5}$$

Кожне перетворення ψ_k горизонтально звужує (у R^k разів) базовий фрактальний сплайн на інтервалі $D = [t_0, t_N]$ і перетворює його на фрагмент фрактального сплайну k-го масштабу на інтервалі $D_i = [t_i, t_{i-1}]$. Неперервне і гладке стикування у вузлах забезпечується граничними умовами:

$$\psi_i(tu_0) = tu_{i-1},\ \psi_i(tu_{R+1}) = tu_i. \tag{6}$$

Якщо відомий вектор значень сплайну нульового масштабу у вузлах, тоді легко отримати значення фрактального сплайну у довільній точці. Для ермітових сплайнів ці значення збігаються із значеннями сплайну у вузлових точках нульового масштабу. Таким чином, можна записати систему рівнянь для знаходження інтерпольованих (між вузлами) значень фрактального сплайну.

Оцінювання параметрів фрактального сплайну можна вважати задачею, зворотною до інтерполяції, де за відомими значеннями у точках інтерполяції (можливо з похибкою) слід знайти вузлові значення. У випадку сплайн-інтерполяції зворотна задача зводиться до пошуку матриці коефіцієнтів базисного сплайну. Звичайно для цього використовується метод найменших квадратів.

Вважаємо, що емпіричні дані є сумою деякого фракталу θ та некорельованої випадкової складової ε:

$$X = \theta + \varepsilon \cdot \tag{7}$$

Також вважаємо, що фрактальна функція з достатньою точністю δ апроксимується фрактальним сплайном:

$$\|PA - \theta\| \le \delta . \tag{8}$$

Розв'язок «зворотної задачі» за методом найменших квадратів полягає у знаходженні оцінок вектора параметрів:

$$A' = (P^T P)^{-1} P^T X , \tag{9}$$

де P – матриця планування фрактального сплайну.

Особливістю МНК для фрактального сплайну очевидно є його матриця планування. Розглянемо побудову такої матриці. Для отриманої матриці ${}^{k}TU$ масштабу k на множині вхідних точок $\{(t_i, x_i\}_{i=0}^{N}$ розраховуємо матрицю планування ${}^{k}P$. Значення j-го стовпця матриці ${}^{k}P$ є значеннями j-ї функції форми на інтервалі $D = [t_0, t_N]$. Внаслідок локальних властивостей функції форми матриця ${}^{k}P$ є блочно-діагональною [9, с.100]:

$$ {}^{k}P = \begin{bmatrix} G_{0,0} & 0 & \dots & 0 \\ G_{1,0} & G_{0,1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{N,0} & G_{N-1,1} & \dots & 0 \\ 0 & G_{N,1} & \dots & G_{0,R+1} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

де $G_{i,j}$ — матриці-стовпці, котрі складаються з відліків базису на відповідних суміжних фрагментах. Якщо зобразити ненульові елементи матриці планування точками, то вони матимуть характерний вигляд, показаний на рис. 1. Фрактальна матриця планування є самоподібною. Матриця k-го масштабу є копією матриці $(k-1)$-го масштабу, зменшена в $1/R$ рази.

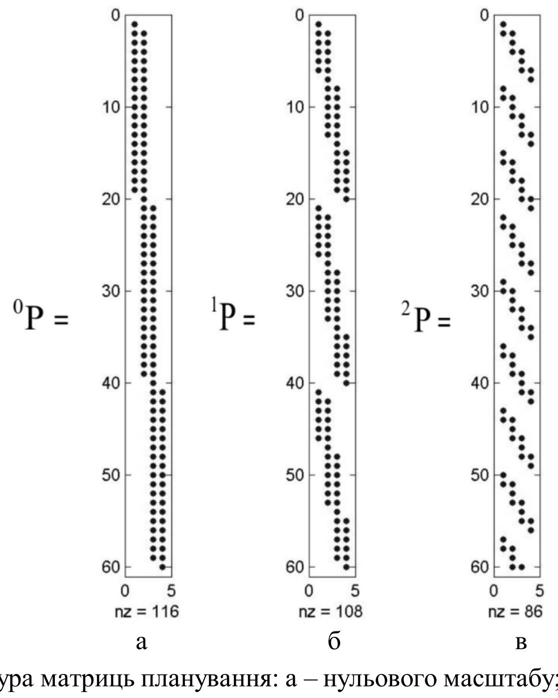

Рис. 1. Внутрішня структура матриць планування: а – нульового масштабу; б – першого масштабу; в – другого масштабу

Оскільки фрактальний сплайн є сумою звичайних сплайнів різних масштабів, що зберігають самоподібність, результуюча матриця планування рівна:

$$P = {}^{0}P + {}^{1}P + \dots + {}^{k}P . \tag{11}$$

3. Алгоритм апроксимації фрактальними сплайнами

Апроксимація фрактальними сплайнами передбачає послідовне виконання таких пунктів:

1. Перевірити вхідний часовий ряд на фрактальність, обчисливши фрактальну розмірність.
2. Розділити вхідні дані на K інтервалів, що не перетинаються. Кінцеві точки інтервалів формують $(K+1)$ вузлів базисного фрактального сплайну.
3. Розрахувати матрицю планування для матриці вузлів базисного сплайну за формулою (10).
4. Розрахувати матрицю коефіцієнтів за формулою (9).
5. Побудувати фрактальний сплайн першого масштабу за формулою

$$ {}^{0}S = {}^{0}P * A . \tag{12} $$

6. Визначити коефіцієнт деталізації (масштаб фрактального сплайну).
7. Визначити систему перетворень кожної точки фрактального сплайну s-го масштабу у точку фрактального сплайну $(s+1)$-го масштабу.
8. Ітераційно застосувати отриману систему перетворень на всі сегменти фрактального сплайну.
9. Оцінити якість апроксимації за формулою (2).
10. Якщо якість апроксимації достатня – завершити, інакше виконати пункт 2 для іншої схеми вузлів.

4. Тестування

З метою тестування метод було випробувано на часових рядах двох типів. Перший тип – фрактальний сплайн інтерполяції з додаванням білого шуму. Модельний фрактальний сплайн для нульового масштабу має вузли {0,16,32,48,64} та значення у вузлах {1,10,-10,10,1}. Для побудови фракталу використано три масштаби. До отриманих значень додавалися некорельовані випадкові числа, розподілені за нормальним законом з одиничною дисперсією.

Результати тестування представлені на рис. 2, а математичні розрахунки – у табл. 1.Хаусдорфова відстань між вхідним і вихідним рядом становить 62,73 од.

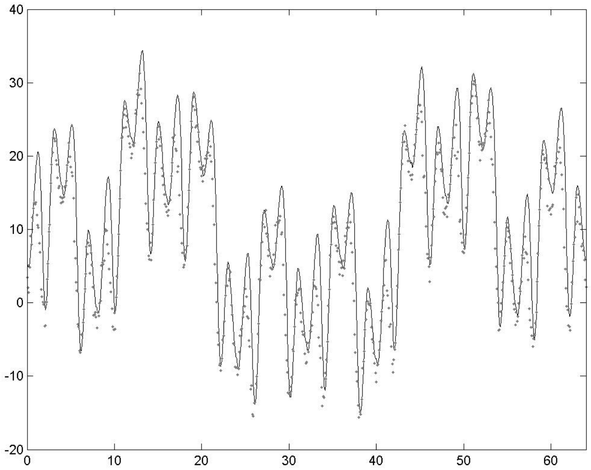

Рис. 2. Апроксимація зашумленого фрактального сплайну.

Точками позначено початкові дані, суцільною лінією – фрактальний сплайн.

Таблиця 1

Задані значення	1	10	-10	10	1
Отримані значення	1,69	11,05	-9,35	10,11	1,68
Абсолютна похибка	-0,69	-1,05	-0,65	-0,11	-0,68
Середня абсолютна похибка за 20 експериментів	0,6	0,6	0,5	0,55	0,63
Середьоквадратичне відхилення за 20 експериментів	0,3	0,33	0,26	0,34	0,25

Другий тип – часовий ряд природного або соціально-економічного походження, який необхідно апроксимувати. Як тестовий обрано економічний ряд індексу Доу-Джонса. Вибір обумовлено низкою досліджень, наприклад [10], які доводять наявність у таких рядах фрактальної природи. Результати апроксимації представлені на рис. 3 і у табл. 2.

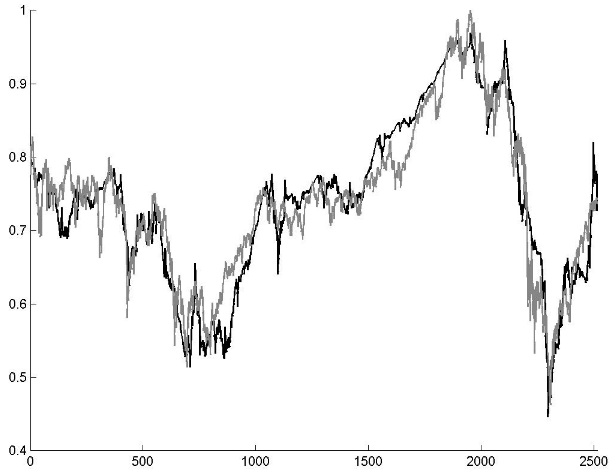

Рис. 3. Апроксимація часового ряду індексу Доу-Джонса. Сірим кольором позначено початковий ряд, чорним – фрактальний сплайн

Таблиця 2

Задані значення	0,8	0,7	0,55	0,75	0,94	0,5	0,75
Отримані значення	0,77	0,71	0,59	0,72	0,93	0,5	0,77
Абсолютна похибка	0,03	-0,01	-0,04	0,03	0,01	0	-0,02

Звичайно, у випадку реальних даних результат апроксимації не настільки хороший, як у попередньому випадку. Це зумовлено тим, що фрактальний сплайн має ще низку параметрів, які слід адаптувати до даних: число фрагментів та схема їх розміщення, кількість масштабів. Однак слід зауважити, що навіть за досить довільного вибору вказаних параметрів фрактальна сплайн-модель дуже вдало передає характер реального процесу.

Висновки і пропозиції

Застосування фрактального сплайну у поєднанні із методом найменших квадратів дозволяє отримати ефективні лінійні оцінки параметрів моделі. При цьому слід відмітити, що число параметрів для фрактального сплайну значно менше, ніж для звичайного сплайну, що описав би подібний процес. За рахунок зменшення числа параметрів, що оцінюються, підвищується достовірність оцінок. При цьому зберігається властива сплайнам простота розрахунків.

Для реальних даних *успішність застосування* фрактального сплайну може суттєво змінюватися залежно від таких додаткових факторів, як число фрагментів сплайну, схеми їх розміщення та кількості масштабів.

Наукова новизна дослідження полягає у розробці методу фрактальної апроксимації без використання систем ітераційних функцій, що дозволило значно зменшити обсяг розрахунків без втрати точності. *Практична значущість* алгоритму полягає у можливості використання для систем стиснення інформації, валютного трейдінгу, радіолокації, у комп'ютерній графіці та інших системах, що працюють з фрактальними сигналами.

Подальші дослідження алгоритмів роботи з фрактальними сплайнами полягають у розробці ефективних способів адаптації фрактального сплайну до даних шляхом зміни розміщення фрагментів сплайну та масштабів.

Список літератури: 1. *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Университетская книга, 2005. С.15-18. **2.** *Craig M. Wittenbrink*. IFS fractal interpolation for 2D and 3D visualization. In Proc. IEEE Visualization '94. P. 77-83, Oct. 1995. **3.** *Zair C.E. and Tosan E.* Computer-aided geometric design with IFS techniques. In Fractal Frontiers (Proc. Fractals '97). P. 443-452, Singapore, 1997. World Scientific. **4.**

K.Berkner, “A Wavelet-Based Solution to the Inverse Problem for Fractal Interpolation Functions”, in Fractals in Engineering ’97, eds. J.Levy Vehel, E.Lutton and C.Tricot (springer, London, 1997). P. 81-92. **5.** *Мітін Д.Ю.* Хаусдорфова фрактальна апроксимація функцій // Доповіді НАН України. 2009. №6. С.26-28. **6.** *Мітін Д.Ю., Назаренко М.О.* Поточкова фрактальна апроксимація функцій // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. 2007. 4, №1. С.200-211. **7.** *Ванін В.В., Залевська О.В.* Точність фрактальної апроксимації структури поверхневого шару близької до фрактальної // Праці ТДАТУ. 2011. Вип. 4. Т.50. С.52-55. **8.** *Navascues M.A., Sebastian M.V.* Fractal Splines. Monografias del Seminario Matematico Garcia de Galdeano 33 (2006). P.161-168. **9.** *Шелевицький І.В.* Методи та засоби сплайн-технології обробки сигналів складної форми. Кривий Ріг: Європейський університет, 2002. С.100-104. **10.** *Петерс Э.* Фрактальный анализ финансовых рынков: Применение теории хаоса в инвестициях и экономике. М.: Интернет-трейдинг, 2004. 304с.

Надійшла до редколегії 16.03.2012

Новікова Ольга Борисівна, аспірантка Національного авіаційного університету. Наукові інтереси: сплайни, фрактали, розробка програмного забезпечення. Адреса: Україна, 50055, Дніпропетровська обл., Кривий Ріг, вул. Кириленка, буд. 27, кв. 92, тел.: 050-907-85-99.