Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

Харківський національний університет радіоелектроніки

ЧОПОРОВ СЕРГІЙ ВІКТОРОВИЧ

УДК [519.674:519.688]:62-11

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ R-ФУНКЦІЙ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Харків – 2011

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Запорізькому національному університеті Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України.

Науковий керівник – доктор технічних наук, професор
Гоменюк Сергій Іванович, Запорізький національний університет, декан математичного факультету.

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор
Лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки
Шейко Тетяна Іванівна, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, керівник відділу прикладної математики та обчислювальних методів;

доктор технічних наук, професор
Заслужений діяч науки і техніки України
Путятін Євгеній Петрович, Харківський національний університет радіоелектроніки, завідувач кафедри інформатики.

Захист відбудеться «____» __________ 2011 р. о ______ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02 у Харківському національному університеті радіоелектроніки (61166, Харків, пр. Леніна, 14).

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Харківського національного університету радіоелектроніки (61166, Харків, пр. Леніна, 14).

Автореферат розісланий «____» __________ 2011 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради В.В. Безкоровайний

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дослідження міцності та довговічності інженерних конструкцій є важливою складовою при проектуванні сучасної техніки. Сьогодні з метою розв'язку таких задач широко використовується комп'ютерне моделювання, яке дозволяє замінити тривале та коштовне випробування дослідного зразка вивченням відповідних математичних моделей. Застосування багатьох обчислювальних методів потребує побудови математичних моделей, які адекватно відповідають геометричній структурі досліджуваного об'єкта або конструкції. Більшість сучасних обчислювальних методів засновано на ідеї заміни вихідного неперервного об'єкта його деякою скінченною дискретною моделлю. Наприклад, у широко розповсюдженому на практиці методі скінченних елементів вихідний континуальний об'єкт замінюється дискретною моделлю, що складається з сукупності геометричних областей простої форми, які не перетинаються, – скінченних елементів. Це призвело до швидкого збільшення кількості дослідницьких робіт, присвячених побудові і аналізу математичних моделей геометричних об'єктів (тіл, конструкцій, елементів машин, тощо). Виникла необхідність розробки методів автоматичної побудови дискретних моделей на базі елементів заданої форми для неперервних математичних моделей складних геометричних об'єктів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась згідно з планом науково-технічних робіт Запорізького національного університету в рамках держбюджетної теми № 5/09 «Розробка методик та програмного забезпечення для розрахунку конструкцій із гумових та гумовокордних матеріалів» (№ДР 0109U002522). Дисертаційна робота є складовою частиною проведених за цією темою досліджень. Дисертантом були розроблені обчислювальні методи та відповідні програмні підсистеми автоматизованої побудови дискретних математичних моделей на базі чотирикутних та шестигранних скінченних елементів для конструкцій, геометричні моделі яких представлені R-функціями; отримані дискретні представлення були використані для аналізу напружено-деформованого стану конструкцій із гумових та гумовокордних матеріалів.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка принципів побудови на основі теорії R-функцій математичних моделей складних геометричних об'єктів та їх дискретизації з використанням чотирикутних і шестигранних елементів.

Для досягнення поставленої мети в роботі сформульовані наступні основні задачі:

1. Розробити моделі і методи аналітичного конструювання математичних моделей складних геометричних об'єктів з математичних моделей простих геометричних об'єктів на базі теорії R-функцій.

2. Розробити метод побудови дискретних математичних моделей, заснованих на чотирикутних скінченних елементах, для аналітичних математичних моделей складних двовимірних геометричних об'єктів, заданих за допомогою R-функцій.

3. Розробити метод побудови дискретних математичних моделей, заснованих на шестигранних скінченних елементах, для аналітичних математичних моделей складних тривимірних геометричних об'єктів, заданих за допомогою R-функцій.

4. Розробити підходи до оптимізації та уточнення дискретних математичних моделей геометричних об'єктів.

5. Розробити й провести апробацію програмного інструментарію для автоматизації математичного моделювання геометричної структури складних технічних конструкцій на базі теорії R-функцій.

Об'єкт дослідження – складні інженерні конструкції.

Предмет дослідження – процес і методи отримання дискретного представлення математичної моделі геометричного об'єкта, заданого аналітичним або кусково-аналітичним способом.

Методи дослідження дослідження ґрунтуються на математичному аналізі, аналітичній геометрії, математичному моделюванні, методах обчислювальної математики, системного аналізу та об'єктно-орієнтованому підході. Для математичного опису моделей геометричних об'єктів складної форми використовується математичний апарат теорій R-функцій.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. У рамках вирішення задач дисертаційного дослідження отримано такі основні нові наукові результати:

– набув подальшого розвитку метод R-функцій для математичного моделювання складних тіл в частині розв'язку задач побудови, візуалізації та аналізу математичних моделей тривимірних геометричних об'єктів, що спрощує процес їх моделювання;

– вперше на базі методу суперпозиції та принципу ізоморфізму розроблено метод побудови дискретних математичних моделей, заснованих на чотирикутних скінченних елементах, для аналітичних математичних моделей складних двовимірних геометричних об'єктів, які задані за допомогою R-функцій, що дозволяє автоматизувати процес побудови дискретних моделей;

– вперше на базі методу суперпозиції та принципу ізоморфізму розроблено метод побудови дискретних математичних моделей, заснованих на шестигранних скінченних елементах, для аналітичних математичних моделей складних тривимірних геометричних об'єктів, які задані за допомогою R-функцій, що дозволяє автоматизувати процес побудови дискретних моделей;

– набув подальшого розвитку метод уточнення дискретної моделі геометричного об'єкту шляхом використання інформації про кривину границі об'єкта і розроблення універсального шаблона уточнення з частковою рекурсією, що дозволяє зменшити його часову складність.

В результаті дослідження отримано розв'язок важливої науково-технічної задачі – підвищення ефективності моделювання геометричних об'єктів. При цьому отримано результати, що мають переваги над існуючими. Очікувані науково-технічні ефекти:

– підвищення якості візуалізації моделей та конструкцій;

– зниження матеріалоємності та скорочення витрат на виготовлення інженерних конструкцій за рахунок підвищення точності моделювання.

Практичне значення отриманих результатів. Розроблені у роботі принципи та методи використання апарату теорії R-функцій для побудови математичних моделей геометричних об’єктів та дискретизації їх на скінченні елементи чотирикутної і шестигранної форми дозволяють не тільки якісно підвищити результати математичного моделювання, але й використовувати їх при проектуванні, аналізі та оптимізації складних інженерних конструкцій. Розв’язок задач дисертаційного дослідження дозволив створити програмну систему автоматизованого математичного моделювання складних геометричних об’єктів на базі теорії R-функцій. Систему реалізовано у вигляді програмного продукту, який працює в середовищі операційних систем GNU/Linux та Windows (XP і новіші) і автоматизує всі основні етапи конструювання математичних моделей геометричних об’єктів та відповідних дискретних математичних моделей; автоматизує задачі згладжування, згущення (побудови нерівномірної сітки) та візуалізації дискретних моделей. Розроблену програмну систему може бути використано і в якості незалежного програмного продукту, і в якості препроцесору для систем скінченно-елементного аналізу, зокрема для системи FORTU. Отримані розв’язки задач дисертаційного дослідження можуть бути використані конструкторськими організаціями та наукоємними виробництвами для розв’язання задач прикладного математичного моделювання геометричних об’єктів і обчислювальних методів.

Практичне значення результатів підтверджується актами впровадження. Впроваджено такі результати дисертаційної роботи:

− метод дискретизації тривимірних конструкцій на скінченні елементи в формі шестигранників та комп’ютерна система геометричного моделювання складних об’єктів використовується в якості препроцесора метода скінченних елементів для подальшого аналізу напружено-деформованого стану елементів виробничих конструкцій в ТОВ ВПП «Техелектропромремонт» (акт впровадження від 19 січня 2011 року);

− методи формалізації математичного моделювання складних геометричних об’єктів; методи дискретизації аналітичних математичних моделей тривимірних геометричних тіл, заданих R-функціями; методи оптимізації та уточнення дискретного представлення; розроблений в роботі програмний комплекс математичного моделювання і дискретизації складних геометричних тіл на елементи чотирикутної та шестигранної форм впроваджені у навчальний процес математичного факультету Запорізького національного університету при читанні спецкурсів «Математичне моделювання задач математичної фізики», «Метод скінченних елементів» для студентів спеціальності «Прикладна математика» (акт впровадження від 1 червня 2011 року).

Особистий внесок здобувача. Усі основні положення і результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно та опубліковані в роботах [1-16].

У наукових працях, опублікованих у співавторстві, з питань, що стосуються наданого дослідження, здобувачу належать: у роботі [1] розробка програмної системи математичного моделювання складних геометричних об’єктів; у роботі [2] розроблено та програмно реалізовано метод дискретизації на шестигранні скінченні елементи областей, які задані за допомогою R-функцій; у роботі [3] розроблено та програмно реалізовано проблемно-орієнтовану мову моделювання геометричних об'єктів; у роботі [4] розроблено та програмно реалізовано критерій пошуку особливих точок R-функцій; у роботі [5] участь у розробці та програмній реалізації ітераційного алгоритму розбиття області аналізу функції; у роботі [6] розробка та програмна реалізація методу дискретизації на чотирикутні скінчені елементи геометричної області, що задана за допомогою R-функцій; у роботі [7] розробка програмної підсистеми візуалізації геометричних об'єктів, які задані за допомогою R-функцій; у роботі [8] розробка програмної підсистеми візуалізації особливих точок та характерних ліній зламів поверхні; у роботі [9] дослідження та порівняльний аналіз методів математичного моделювання геометричних областей складної форми.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи апробовані на 5 наукових конференціях міжнародного рівня: міжнародний симпозіум IEEE EAST-WEST DESIGN & TEST SYMPOSIUM 2009 (Росія, Москва, 18-21 вересня 2009 р.); міжнародна конференція «Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Кластерные технологии моделирования» (Росія, Іжевськ, 4-6 лютого 2009 р.); міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні технології в освіті та управлінні» (Україна, Нова Каховка, 27-29 травня 2010 р.); міжнародна конференція «Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Технологии высокополигонального моделирования» (Росія, Іжевськ, 24-26 листопада 2010 р.); XII міжнародна конференція по математичному моделюванню МКММ-2011, присвячена 190-річчю з дня народження П.Л. Чебишова (Україна, Херсон, 12-17 вересня 2011 р.).

Публікації. Основні результати за темою дисертації викладено у 16 опублікованих роботах: 4 статтях у наукових журналах і збірниках, що входять до переліків, затверджених ВАК України по технічним наукам [1-4], 4 статтях у наукових журналах і збірниках, що входять до переліків, затверджених ВАК України по фізико-математичним наукам [5-8], 1 стаття у зарубіжному науковому виданні [9], 7 тезах доповідей і збірниках праць наукових конференцій [10-16].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел зі 164 найменувань (18 сторінок) та двох додатків (2 сторінки). Загальний обсяг роботи складає 152 сторінки, у тому числі 132 сторінки основного тексту, ілюстрованих 95 рисунками та 4 таблицями.

ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовується актуальність теми дослідження, формулюється мета та завдання дослідження, визначаються об'єкт, предмет та методи досліджень, висвітлюється наукова новизна та практичне значення отриманих результатів, а також особистий внесок автора в роботах, виконаних у співавторстві, відзначається апробація результатів дисертації та кількість публікацій, виконаних за темою дисертаційної роботи.

У **першому розділі** розглянуто і класифіковано основні підходи і методи математичного моделювання геометричних об’єктів, наведено огляд основних методів побудови дискретних моделей геометричних об’єктів на базі чотирикутних і шестигранних скінченних елементів.

Проведений в дисертаційній роботі аналіз показав, що серед різноманітності методів побудови математичних моделей геометричних об’єктів найбільш універсальним та ефективним є функціональний підхід, який дозволяє описувати довільну геометричну область за допомогою певного аналітичного співвідношення (мова йде про розв’язання так званої оберненої задачі аналітичної геометрії, коли для вихідної геометричної області будується її аналітичний опис).

Для математичного моделювання геометричних об’єктів на базі функціонального підходу використовуються неявні математичні функції, значення яких більші нуля всередині об’єкта, дорівнюють нулю на границі та менші нуля зовні.

В роботі обґрунтовується, що найбільш універсальним способом побудови функціональних моделей геометричних об’єктів є використання R-функцій В. Л. Рвачова, які дозволяють будувати моделі складних об’єктів конструктивно, використовуючи логічні комбінації функцій, що відповідають більш простим геометричним об’єктам.

Універсальність функціонального підходу забезпечується нескінченністю множини форм, які можуть бути представлені математичними функціями. Такий підхід дозволяє будувати як точні, так і наближені моделі (наприклад, на базі сплайн-функцій). Функціональний підхід є також вельми компактним з точки зору збереження інформації про модель. Сьогодні існують досить ефективні алгоритми автоматичного аналізу і оптимізації математичних формул.

Внаслідок аналізу джерел, присвячених дослідженню методів математичного моделювання геометричних об’єктів, розробці та автоматизації методів побудови дискретних моделей, можна зробити такі висновки.

По-перше, актуальною є розробка математичних моделей (і способів їх аналітичного конструювання) складних геометричних об’єктів з математичних моделей простих об’єктів на базі теорії R-функцій.

По-друге, самостійною, складною і актуальною є розробка методів побудови дискретних математичних моделей, на базі чотирикутних (на площині) і шестигранних (у тривимірному просторі) скінченних елементів, для аналітичних математичних моделей геометричних об’єктів заданих за допомогою R-функцій.

Слід зазначити, що на практиці, з одного боку, в основному вимагається побудова нерівномірних сіток, в яких кількість скінченних областей збільшується в місцях, так званих, сингулярностей (особливостей) об’єкта (гострих кутів, отворів, тріщин, тощо). З іншого боку, побудова первинного наближеного розбиття на елементи потребує подальшої його оптимізації.

Також є необхідність створення автоматизованої програмної системи математичного моделювання складних геометричних об’єктів.

У **другому розділі** з метою спрощення процесу математичного моделювання на базі функціонального підходу і теорії R-функцій розроблено моделі геометричних об’єктів, що відповідають базовим конструкторським примітивам. Зокрема запропоновано аналітичні моделі, що відповідають півплощинам і півпросторам; плоскі та двогранні кути; області, обмежені кривими та поверхнями другого порядку; багатокутники та багатогранники; різні типи з'єднань; розглянуто основні прийоми утворення функціональних моделей циліндричних і гвинтових тіл, тіл обертання; розглянуто особливості використання сплайнів для функціонального моделювання на базі теорії R-функцій.

У цьому розділі розглянуто практичні аспекти моделювання на базі запропонованих функціональних моделей шляхом використання математичних операцій, які відповідають руху і обертанню геометричних об'єктів. Наприклад, математична модель профілю зубчастого колеса (рис. 1) може бути представлена у вигляді

$$
\begin{gathered}
t(x,y)=F_{disk}(x,y,N_p,N_x,N_y)\wedge \\
\wedge F_{disk}\left(r_x\left(x,y,\frac{r}{s}\right),r_y\left(x,y,\frac{r}{s}\right),N_p,-N_x,N_y\right), \\
g(x,y)=F_{disk}\left(x,y,\frac{d_f}{2},0,0\right)\vee t\left(r_x(x,y,0),r_y(x,y,0)\right)\vee \\
\vee t\left(r_x(x,y,\varphi),r_y(x,y,\varphi)\right)\vee t\left(r_x(x,y,2\varphi),r_y(x,y,2\varphi)\right)\vee\ldots\vee \\
\vee t\left(r_x(x,y,2\pi-\varphi),r_y(x,y,2\pi-\varphi)\right), \\
gear(x,y)=g(x,y)\wedge F_{disk}\left(x,y,\frac{d_a}{2},0,0\right),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

де m – модуль колеса; z – кількість зубців; $d=mz$ – ділильний діаметр; $d_a=m(z+2)$ – діаметр вершин; $d_f=m(z-2.5)$ – діаметр впадин; $s=\frac{\pi}{2}m$ – товщина зубця; $r=\frac{d}{2}$ – радіус початкової окружності; $\alpha=20^\circ$ – кут профілю зубця рейки; $r_b=r\cos\alpha$ – радіус основної окружності; $N_x=-r_b\sin\alpha$ та $N_y=r_b\cos\alpha$ – локальні зсуви центрів окружностей, що апроксимують евольвенту; $N_p=r\sin\alpha$ – радіус окружностей, що апроксимують евольвенту; $\varphi=\frac{2\pi}{z}$ – кут повороту зубця; $F_{disk}(x,y,r,x_0,y_0)=r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2$ – функція, яка відповідає області, обмеженій окружністю радиуса r з центром в точці (x_0, y_0); $r_x(x,y,\beta)=x\cos\beta+y\sin\beta$ і $r_y(x,y,\beta)=-x\sin\beta+y\cos\beta$ відповідають повороту об'єкта на кут β проти годинникової стрілки.

На базі формули (1) може бути отримана, наприклад, модель конічного зубчастого колеса (рис. 1) у вигляді

$$
G_C(x,y,z)=gear\left(x\left[2\frac{(z+5)}{10}+1\right],y\left[2\frac{(z+5)}{10}+1\right]\right)\wedge(5^2-z^2).
$$

Для автоматизації використання R-функцій у математичному моделюванні геометричних областей в першу чергу необхідно розробити формальний спосіб їх описання, який буде «зрозумілий» для комп'ютера. Аналіз показав, що найбільш розповсюдженим розв'язком цієї задачі є використання проблемно-орієнтованих мов. В цьому розділі розроблено проблемно-орієнтовану мову, яка є модифікацією мови FORTU, що враховує необхідність задавання додаткової інформації про математичну модель геометричного об'єкта і особливості задачі дискретизації. У якості альтернативного розв'язку задачі формалізації розглядається можливість створення проблемно-орієнтованої мови на базі стандарту ECMAScript (який є базовим для розповсюдженої мови JavaScript), шляхом доповнення останнього проблемно-орієнтованими конструкціями і командами.

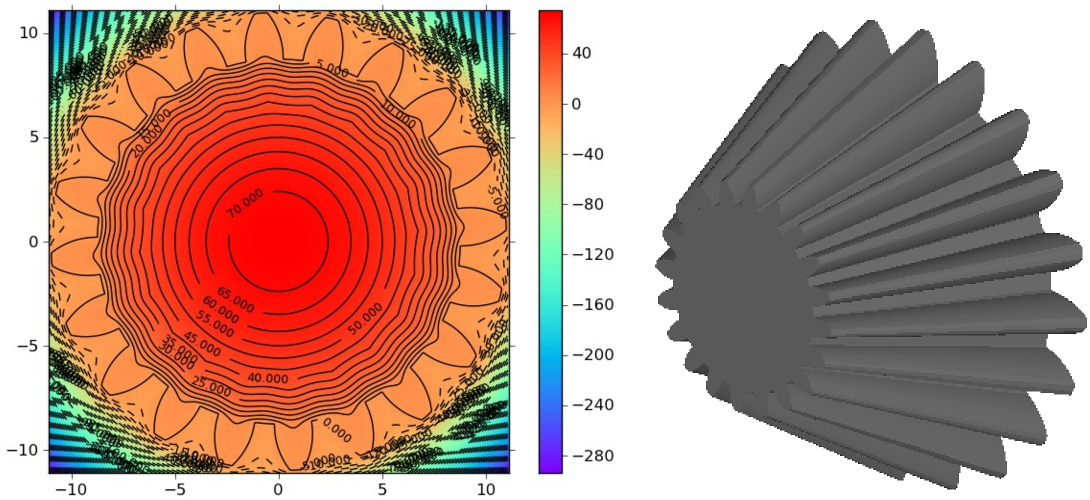

Рисунок 1 – Профіль зубчастого колеса та модель відповідного конічного зубчастого колеса: $m = 1$, $z = 20$

Практичне застосування функціонального підходу та теорії R-функцій для математичного моделювання геометричних об'єктів характеризується складністю пошуку особливих точок R-функцій, як правило – гострих кутів, які у механіці виступають концентраторами напружень. Для розв'язку цієї задачі в другому розділі розроблено критерій, який має вигляд тверджень 1 (випадок елементарних R-функцій) та 2 (випадок складних R-функцій).

З геометричної точки зору особливі точки R-функції можуть бути визначені як точки перетину границь областей, що задані операндами R-функцій.

Нехай $\rho(X)$ – елементарна R-функція – результат R-операції над елементарними функціями $\varphi(X)$ та $\psi(X)$, де X – точка простору $\boldsymbol{E}^n$. Якщо точка X_0 – особлива точка функції $\rho(X)$, тоді з визначення випливає, що в цій точці одночасно обертаються в нуль функції $\rho(X)$, $\varphi(X)$ та $\psi(X)$. Відповідно, справедливо наступне твердження.

Твердження 1. Для того, щоб точка X_0 була особливою точкою елементарної R-функції $\rho(X)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\kappa(\varphi, \psi) = \varphi^2(X_0) + \psi^2(X_0) = 0. \qquad (2)$$

У загальному випадку, при математичному моделюванні геометричних об'єктів складної форми результуюча функція будується конструктивно, використовуючи елементарні функції та побудовані на попередніх етапах R-функції. Нехай у складну R-функцію входить *m* R-операцій (кон'юнкції або диз'юнкції) та κ_i – функція виду (2) для *i*-ї R-операції. Тоді функція $\mathrm{K}(X)=\prod_i \kappa_i(X)$ буде всюди невід'ємною функцією, як добуток всюди невід'ємних функцій, та буде дорівнювати нулю, коли дорівнює нулю одна з функцій κ_i (при цьому набувати свого мінімуму). Можна зробити висновок, що обернення в нуль функції $\mathrm{K}(X)$ є необхідною умовою наявності особливої точки в точці X_0. Достатньою умовою буде одночасне обернення в нуль функції $\mathrm{K}(X)$ з вихідною складною R-функцією (особлива точка R-операції над елементарними функціями може опинитися поза областю, що моделюється, в результаті подальших R-операцій).

Твердження 2. Для того, щоб точка X_0 була особливою точкою складної R-функції R(X), необхідно і достатньо виконання умови

$$\begin{cases} \mathrm{K}(X_0)=\prod_i \kappa(X_0)=0, \\ R(X_0)=0. \end{cases}$$

У **третьому розділі** розглянуті геометричні та обчислювальні особливості практичного застосування сіток на базі чотирикутних та шестигранних скінченних елементів.

У цьому розділі запропоновано метод побудови дискретної моделі тіла, аналітична модель якого задана функціонально на базі теорії R-функцій.

Нехай тіло Ω задано неявно: геометричне місце точок, що відповідають тілу, визначене нерівністю $F(x,y,z)\geq 0$. При цьому $F(x,y,z)>0$ у внутрішніх точках, $F(x,y,z)=0$ у граничних точках і $F(x,y,z)<0$ у зовнішніх точках. Таке представлення моделі тіла Ω дає правило для перевірки приналежності точки тілу Ω, однак не дає правила генерації системи точок та топології елементів, що утворюють Ω. Тому в роботі обґрунтовується вибір методу суперпозиції в якості бази для розробки методу побудови дискретних моделей для функціональних моделей на базі теорії R-функцій. Отриманий в результаті метод складається з п'яти кроків.

На першому кроці формується вихідна сітка – сітка, яка досить просто може бути отримана (наприклад, рівномірна сітка з кроком *h*). Далі початкову сітку формують тільки ті комірки, поблизу яких відсутні зовнішні точки. Тоді, якщо $S=(V,E)$ – вихідна сітка, $V=\{v_i=(x_i,y_i,z_i)\}$ – множина вузлів, $E=\{e_j=(i_{j0},i_{j1},i_{j2},i_{j3},i_{j4},i_{j5},i_{j6},i_{j7})\}$ – множина упорядкованих послідовностей номерів вузлів, що формують комірки, тоді початкова сітка *M* може бути визначена формулою

$$M=I(S),$$

де I – оператор, який вертає внутрішні елементи та вузли, що їм належать. При цьому вузол буде вважатися внутрішнім, якщо на відстані 0,5 h відсутні зовнішні або граничні точки:

$$i_{vertex}(v)=\begin{cases}1, & якщо\ \ \forall\delta\in[0,0.5]\ \ F(v\pm\delta h)>0,\\0, & якщо\ \ \exists\delta\in[0,0.5]:\ F(v\pm\delta h)\le 0,\end{cases} \tag{3}$$

де v – координати вузла вихідної сітки.

Відповідно, комірка e_j вихідної сітки буде вважатися внутрішньою (належати початковій сітці), якщо всі її вузли внутрішні:

$$i_{cell}(e_j)=\begin{cases}1, & якщо\ \ \forall i_{jk}\in e_j\ \ i_{vertex}(v_{i_{jk}})=1,\\0, & якщо\ \ \exists i_{jk}\in e_j:\ i_{vertex}(v_{i_{jk}})=0.\end{cases}$$

Тоді оператор I (S) можна представити у вигляді

$$I(S)=\{v_i\ якщо\ \exists e_j\ni v_i : i_{cell}(e_j)=1, e_k\ якщо\ i_{cell}(e_k)=1\}.$$

З метою зменшення кількості операцій обчислення R-функцій в формулі (3) в роботі запропонована схема, яка пропонує їх обмежити 9 на площині та 27 у тривимірному просторі.

Границя отриманої таким чином початкової сітки є багатогранником, кожна грань котрого є чотирикутником. Таким чином, її можна розглядати як неструктуровану сітку чотирикутних елементів Q, для якої може бути отримана відповідна сітка Q' на границі тіла (принцип ізоморфізму, приклад на рис. 2). Для отримання сітки Q' необхідно для кожного вузла $v\in Q$ визначити вузол $v'\in Q'$ на границі тіла та, відповідно, для кожного ребра $(v,w)\in Q$ – ребро $(v',w')\in Q'$ на границі тіла. Таким чином, кожному чотирикутнику $q\in Q$ буде відповідати грань $q'\in Q'$ на границі тіла, які разом утворюють шестигранний елемент.

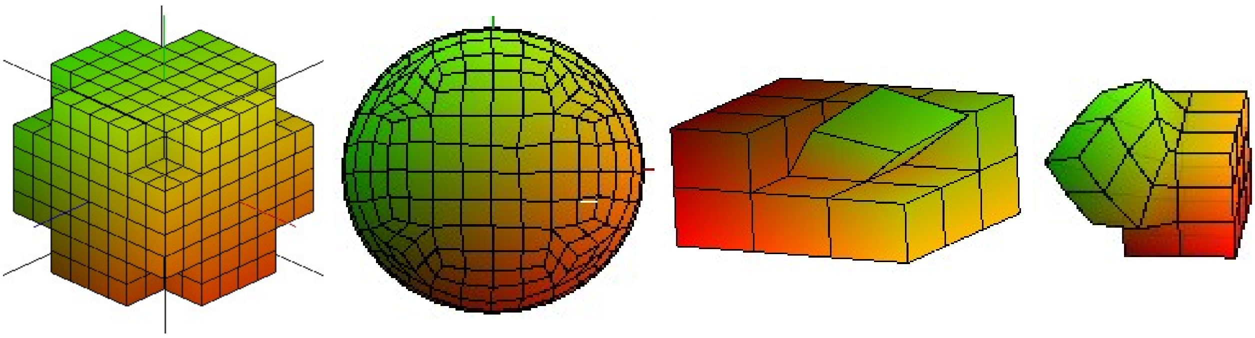

Рисунок 2 – Початкова сітка та відповідна сітка на границі

На другому кроці для кожного граничного вузла початкової сітки визначається нормаль як середнє арифметичне нормалей до суміжних у цьому вузлі граней:

$$N(v)=\frac{1}{k}\sum_{f_i \ni v} n_{f_i},$$

де k – кількість граней суміжних у вузлі v; n_{f_i} – нормаль до i-ї грані.

На третьому кроці на границі Ω визначаються відповідні вузли, як перетин променя, що проходить уздовж нормалі з граничного вузла початкової сітки, з границею Ω. Необхідно відзначити, що R-функція, яка описує Ω, додатна всередині, дорівнює нулю на границі та від'ємна поза Ω, це робить зручним для реалізації та використання двійковий пошук.

На четвертому кроці враховуються особливі точки (геометричні особливості, концентратори напружень, тощо). При цьому характерні точки можуть бути враховані як за допомогою техніки переміщення найближчого вузла, так і за допомогою корекції напряму нормалі у випадку граничної особливості.

На п'ятому кроці формується граничний шар елементів шляхом з'єднання граничних вузлів початкової сітки з відповідними вузлами на границі тіла.

Запропонований підхід до побудови дискретної моделі на базі шестигранних елементів може бути використаний у двовимірній постановці для отримання сітки чотирикутних елементів. В цьому випадку границею початкової сітки буде багатокутник (рис. 3), вузли якого разом з відповідними вузлами на границі будуть утворювати граничний шар чотирикутних елементів.

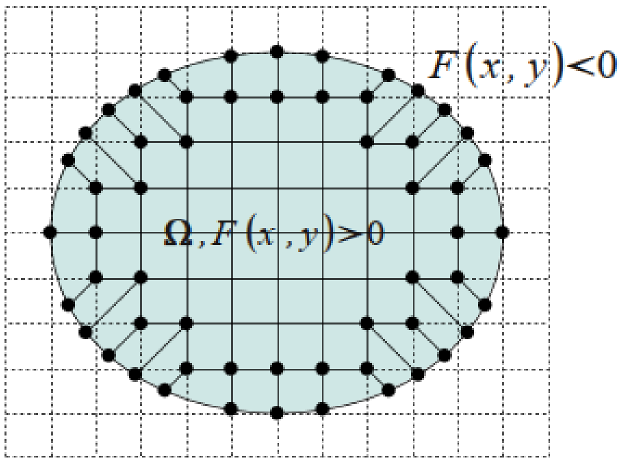

Рисунок 3 – Дискретизація двовимірного об'єкта

Потрібно зазначити, що в результаті застосування такого підходу генеруються елементи приблизно однакового розміру. Однак на практиці в основному необхідна побудова нерегулярних сіток. Для розв'язку цієї задачі в третьому розділі дисертаційної роботи розроблено універсальний шаблон з частковою рекурсією (рис. 4). Використання такого шаблону разом з шаблонами, розробленими іншими дослідниками в цій галузі, дозволяє в деяких випадках зменшити кількість скінченних елементів.

Загальна послідовність дій для згущення сітки шестигранних елементів складається з трьох кроків:

– для кожного елемента обчислити значення керуючої функції (прикладом такої функції може бути обмеження на значення кута між нормалями граничних елементів);

– кожен елемент, в якому керуюча функція отримує істинне значення, замінити більш густою сіткою (в роботі розглянута заміна сітками з 9 елементів на площині і 27 у просторі);

– відновити топологію сітки шляхом використання системи шаблонів разом з універсальним.

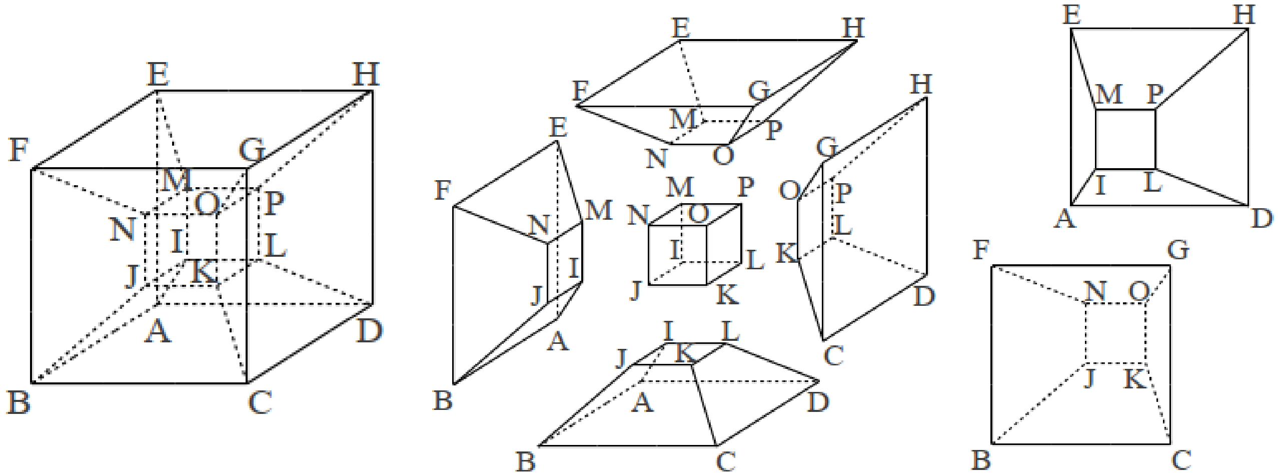

Рисунок 4 – Універсальний шаблон

З метою оптимізації співвідношення площ (об'ємів) сусідніх елементів на практиці в якості заключного етапу побудови сітки використовується згладжування. У загальному випадку згладжування дискретної моделі тіла, побудованої на базі метода R-функцій, можна представити у вигляді

$$M^*=S(M),$$

де M – вихідна сітка; S – оператор згладжування; M^* – результат згладжування.

При цьому сітка M може розглядатися як впорядкована пара:

$$M = (N_i + N_b, E),$$

де N_i – множина внутрішніх вузлів; N_b – множина граничних вузлів.

Тоді операцію згладжування можна представити у вигляді

$$M^*=S_i(N_i, E)+S_b(N_b, E),$$

де S_i – оператор згладжування внутрішніх вузлів; S_b – оператор згладжування граничних вузлів.

На практиці в якості оператора згладжування внутрішніх вузлів розповсюджені підходи на основі локальних операцій згладжування, основна ідея яких полягає у розміщенні вузла у точці, відповідній деякій усередненій інформації про координати сусідніх вузлів (наприклад, при згладжуванні Лапласа вузол переміщується у позицію середнього арифметичного координат сусідніх вузлів).

Аналогічно операцію згладжування можна визначити для граничних вузлів

$$x_b^* = f_b(x_b) = reprojection\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^b\right),$$

де $x^b{}_j$ – координати сусідніх граничних вузлів; n – кількість сусідніх граничних вузлів; *reprojection* – операція репроекції на границю тіла.

Операція репроекції базується на пошуку перетину деякого відрізку, що проходить через середнє арифметичне координат сусідніх граничних вузлів, з нульовим рівнем R-функції. При цьому важливими є направлення такого відрізку. На площині такий відрізок можна направити вздовж прямої, перпендикулярної до відрізку, що з'єднує сусідні с x_b граничні вузли (рис. 5).

У тривимірному просторі в якості напряму репроекції може бути використане середнє арифметичне нормалей граней, суміжних в точці x_b. При цьому, як на площині, так і в тривимірному просторі, довжина $AO = OB$ може дорівнювати кроку початкової сітки або максимальній довжині ребра елементів, суміжних у вузлі.

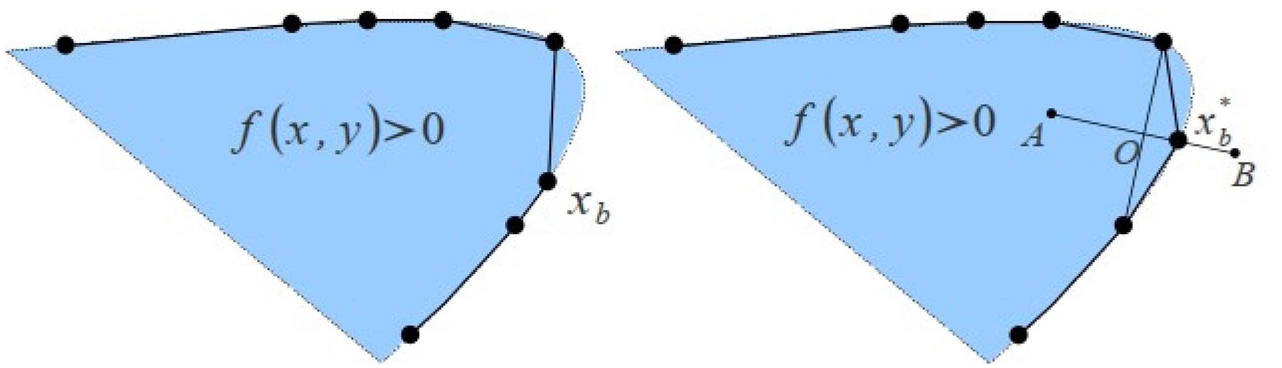

Рисунок 5 – Операція репроекції

Потрібно зазначити, що така процедура згладжування прагне зробити сітку однорідною (рівномірною) і є непридатною у випадках, коли фізична постановка або геометричні особливості конструкції вимагають нерівномірності сітки.

У **четвертому розділі** з метою розв'язання задачі автоматизації математичного моделювання геометричних об'єктів розроблено об'єктну модель відповідної програмної системи. Основою розробленої моделі є ідея розподілу обчислювального (як переважно незалежного від програмної платформи) та графічного (реалізація більшості функцій якого залежить від цільової платформи) блоків. Реалізація класів графічного блоку за допомогою засобів крос-платформового програмування (наприклад, бібліотек Qt або wxWidgets) та розробка додаткових абстрактних класів, що з'єднують обчислювальний та графічний блоки, дозволили створити незалежний від платформи програмний засіб (код без додаткових змін компілюється та працює в системах GNU/Linux, BSD, MS Windows XP та новіші).

Проведена у цьому розділі оцінка обчислювальної складності алгоритмів на базі розробленого методу побудови дискретного представлення функціональної моделі геометричного об'єкта на базі методу R-функцій показала, що кількість операцій обчислення R-функції (одна з найбільш вибагливих до обчислювальних ресурсів) можна обмежити величиною $O(N)$, де N – кількість вузлів вихідної сітки.

Проведений у цьому розділі обчислювальний експеримент показав, що відносна похибка дискретних моделей, побудованих за допомогою розроблених методів, не перевищує 3%. В якості порівняльних величин у обчислювальному експерименті використані площа для двовимірних об'єктів та об'єм для тривимірних. При цьому початкові сітки були досить невеликими (10×10 або 20×20 на площині та 20×20×20 або 30×30×30 в тривимірному просторі). Для оцінки похибки складних тіл, об'єм яких важко оцінити точною формулою, використано метод Монте-Карло.

У цьому розділі наведено приклади побудови, формалізації та відповідних дискретних представлень для моделей деяких технічних елементів (рис. 6). Розглянуто задачу застосування отриманих дискретних моделей у методі скінченних елементів для визначення напружено-деформованого стану.

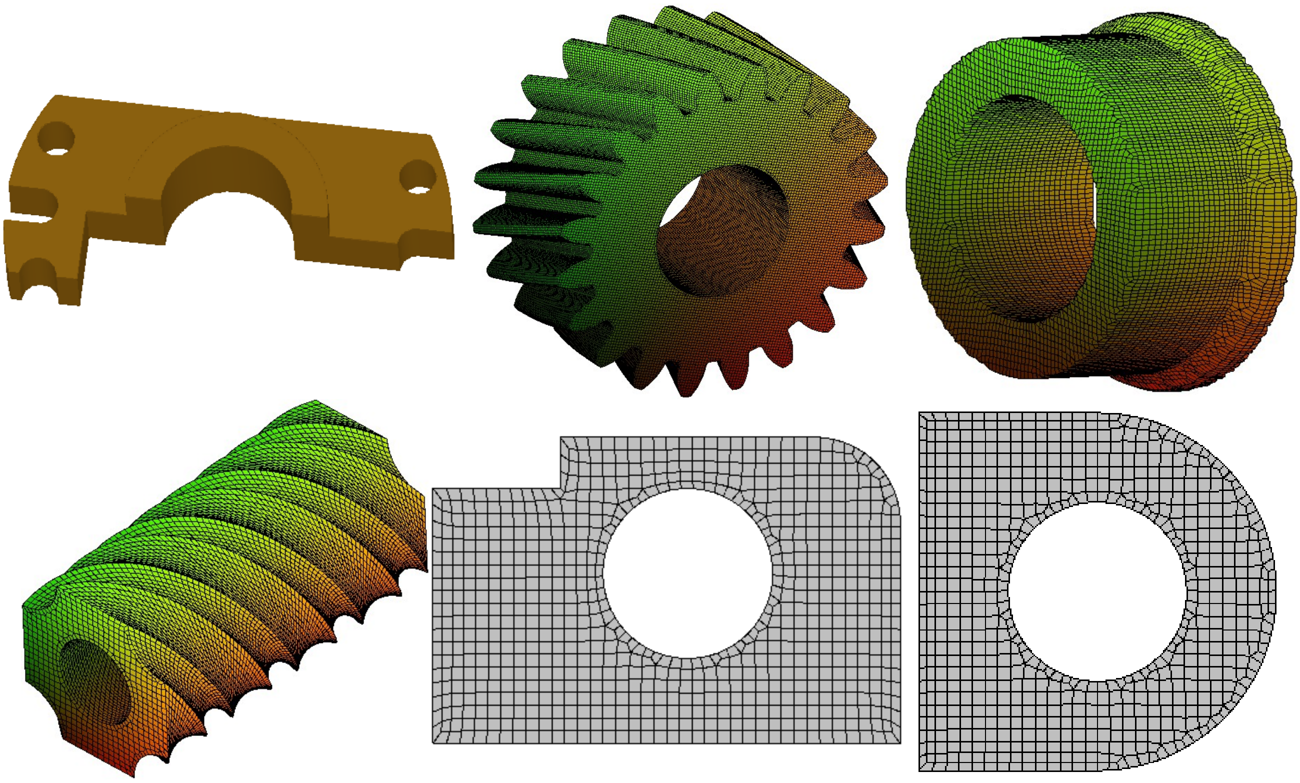

Рисунок 6 – Деякі приклади дискретних моделей

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі отримано результати, які у відповідності до мети дослідження у сукупності є розв'язком важливої науково-технічної задачі розробки принципів побудови на основі теорії R-функцій математичних моделей складних геометричних об'єктів та їх дискретизації з використанням чотирикутних і шестигранних елементів. Для розв'язання цієї задачі розроблено підхід до формалізації математичних моделей геометричних об'єктів. Отримані результати дозволяють описувати складні об'єкти для інженерних розрахунків методом скінченних елементів, скінченних різниць та іншими методами.

В роботі проведено аналіз і класифікацію основних методів та підходів до математичного моделювання геометричних об'єктів. Визначено місце функціонального підходу на базі теорії R-функцій.

Основні результати полягають у наступному:

1. Набув подальшого розвитку метод R-функцій для математичного моделювання складних тіл в частині розв'язку задач побудови, візуалізації та аналізу математичних моделей тривимірних геометричних об'єктів, що спрощує процес їх моделювання.

2. На базі методу суперпозиції та принципу ізоморфізму розроблено метод побудови дискретних математичних моделей, заснованих на чотирикутних скінченних елементах, для аналітичних математичних моделей складних двовимірних геометричних об'єктів, які задані за допомогою R-функцій, що дозволяє автоматизувати процес побудови дискретних моделей.

3. На базі методу суперпозиції та принципу ізоморфізму розроблено метод побудови дискретних математичних моделей, заснованих на шестигранних скінченних елементах, для аналітичних математичних моделей складних тривимірних геометричних об'єктів, які задані за допомогою R-функцій, що дозволяє автоматизувати процес побудови дискретних моделей.

4. Набув подальшого розвитку метод уточнення дискретної моделі геометричного об'єкту шляхом використання інформації про кривину границі об'єкта і розроблення універсального шаблона уточнення з частковою рекурсією, що дозволяє зменшити його часову складність.

В процесі розв'язку задач дисертаційного дослідження розроблено і апробовано програмний інструментарій для автоматизації математичного моделювання геометричної структури складних інженерних конструкцій на базі теорії R-функцій.

В результаті дослідження отримано розв'язок важливої науково-технічної задачі – підвищення ефективності моделювання геометричних об'єктів. Отримані результати мають переваги над існуючими. Очікуваний науково-технічний ефект:

− підвищення якості візуалізації моделей деталей та конструкцій;

− зниження матеріалоємності та скорочення витрат на виготовлення інженерних конструкцій за рахунок підвищення точності моделювання.

Практичні результати представлені візуальними прикладами, що підтверджують можливості розробленого апарату. Точність і вірогідність результатів підтверджується порівняльним аналізом, відповідністю фізичному змісту, стійкістю до згущення сітки.

Таким чином, запропоновані методи і принципи математичного моделювання складних тіл, а також розроблена на їх основі автоматизована система дозволяють підвищити точність обчислювального експерименту та ефективність інженерного проектування.

ОСНОВНІ РОБОТИ, ОПУБЛІКОВАНІ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Чопоров С.В. Система геометрического моделирования сложных тел / С.В. Чопоров, С.И. Гоменюк // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2010. – № 2(38). – С. 147-153.

2. Гоменюк С.И. Дискретизация трехмерных областей, заданных R-функциями, на шестигранные конечные элементы / С.И. Гоменюк, С.В. Чопоров // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2011. – № 3(42). – С. 146-153.

3. Чопоров С.В. Проблемно-ориентированный язык геометрического моделирования на базе теории R-функций / С.В. Чопоров, С.И. Гоменюк // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукови праць. Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ «ХПІ», 2011. – № 17. – С. 181-189.

4. Чопоров С.В. Критерий поиска особых точек R-функций / С.В. Чопоров, С.И. Гоменюк // Проблемы машиностроения. – 2011. – № 1(14). – С. 57-61.

5. Мухин В.В. Итерационный алгоритм разбиения области / В.В. Мухин, С.В. Чопоров // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2008. – № 1. – С. 136-138.

6. Чопоров С.В. Дискретизация геометрических областей, заданных R-функциями, на четырехугольные конечные элементы / С.В. Чопоров, А.А. Лисняк, С.И. Гоменюк // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2009. – № 1. – С. 199-207.

7. Лисняк А.А. Методика визуализации геометрических объектов, описанных с помощью R-функций / А.А. Лисняк, С.И. Гоменюк, С.В. Чопоров // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2010. – № 1. – С. 88-97.

8. Клименко М.И. Визуальное выделение особых точек и характерных линий изломов исследуемой поверхности / М.И. Клименко, Н.А. Кондратьева, В.В. Мухин, Ю.В. Сологуб, С.В. Чопоров // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2010. – № 1. – С. 50-55.

9. Чопоров С.В. Использование функций В.Л. Рвачева для геометрического моделирования областей сложной формы / С.В. Чопоров, А.А. Лисняк, С.И. Гоменюк // Прикладная информатика. – 2010. – № 2(26). – С. 109-122.

10. Чопоров С.В. Использование R-функций для геометрического моделирования и дискретизации инженерных конструкций / С.В. Чопоров, С.И. Гоменюк // Збірник тез доповідей шостої регіональної наукової конференції молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (24-25 квітня 2008 р., м. Запоріжжя). – Запоріжжя: Державний вищий навчальний заклад «Запорізький національний університет» Міністерства освіти і науки України, 2008. – С. 49-50.

11. Чопоров С.В. Метод дискретизации четырехугольными элементами области заданной R-функцией на основе сетки / С.В. Чопоров, С.И. Гоменюк // Збірник тез доповідей сьомої регіональної наукової конференції молодих

дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (23-24 квітня 2009 р., м. Запоріжжя). – Запоріжжя: Державний вищий навчальний заклад «Запорізький національний університет» Міністерства освіти і науки України, 2009. – С. 67-68.

12. Gomenyuk S.I. Geometrical Modeling and Discretization of Complex Solids on the Basis of R-functions / S.I. Gomenyuk, S.V. Choporov, A.O. Lisnyak // Proceedings of «IEEE East-West Design & Test Symposium» (18-21 September 2009, Moscow, Russia). – Moscow: Moscow State Institute of Electronics and Mathematics, 2009. – P. 313-315.

13. Гоменюк С.И. Геометрическое моделирование объектов сложной формы с использованием R-функций / С. И. Гоменюк, А. А. Лисняк, С. В. Чопоров // Труды Первой международной конференции «Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности» (4-6 февраля 2009, Ижевск, Удмуртская республика, Россия). – Ижевск: Удмуртский государственный университет, 2009. – С. 132-136.

14. Гоменюк С.И. Использование R-функций для геометрического моделирования зубчатых колес / С.И. Гоменюк, С.В. Чопоров // Труды Второй международной конференции «Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Технологии высокополигонального моделирования» (24-26 ноября 2010, Ижевск, Россия). – Ижевск: Удмуртский государственный университет, 2010. – Т. 2. – С. 36-38.

15. Чопоров С.В. Функциональный подход к геометрическому моделированию сложных тел / С.В. Чопоров, С.И. Гоменюк // Збірка тез доповідей восьмої Всеукраїнської наукової конференції молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (29-30 квітня 2010 р., м. Запоріжжя). – Запоріжжя: Державний вищий навчальний заклад «Запорізький національний університет» Міністерства освіти і науки України, 2010. – С. 43-45.

16. Чопоров С.В. Представление функциональной геометрической модели шестигранными конечными элементами / С.В. Чопоров // Тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України «Сучасні проблеми машинобудування» (8-11 листопада 2010 р., м. Харків). – Харків:Інститут проблем машинобудування ім. І.М. Підгорного НАН України, 2010. – С. 48.

АНОТАЦІЯ

Чопоров С.В. Математичне моделювання геометричних об’єктів з використанням R-функцій. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, 2011.

Дисертацію присвячено розробці принципів формалізації описання на основі теорії R-функцій та дискретизації математичних моделей складних геометричних об’єктів з використанням чотирикутних і шестигранних елементів.

В роботі набув подальшого розвитку метод R-функцій для математичного моделювання складних тіл в частині розв’язання задач побудови, візуалізації та

аналізу математичних моделей тривимірних геометричних об'єктів. Вперше на базі методу суперпозиції та принципу ізоморфізму розроблено метод побудови дискретних математичних моделей, заснованих на чотирикутних та шестигранних скінченних елементах, для аналітичних математичних моделей складних геометричних об'єктів, що задані за допомогою R-функцій. Набув подальшого розвитку метод уточнення дискретного представлення геометричного об'єкту, на базі якого розроблено універсальний шаблон уточнення з частковою рекурсією.

Отримано нові наукові результати та розроблено програмний засіб, який дозволяє моделювати складні геометричні об'єкти та може бути використаний в якості препроцесору методу скінченних елементів.

Ключові слова: R-функція, скінченний елемент, дискретна модель, геометричний об'єкт, шестигранник, чотирикутник.

АННОТАЦИЯ

Чопоров С.В. Математическое моделирование геометрических объектов с использованием R-функций. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, 2011.

Диссертация посвящена аналитическому и дискретному математическому моделированию геометрических объектов на базе функционального подхода и теории R-функций.

В диссертационной работе рассмотрены основные подходы и методы моделирования геометрических объектов, определено место, которое среди них занимает функциональный подход на базе теории R-функций.

Получил дальнейшие развитие метод R-функций для математического моделирования сложных тел в части решения задач построения, визуализации и анализа моделей трехмерных тел. В частности, построены модели многих конструктивных элементов и технических деталей; рассмотрены особенности получения моделей цилиндрических, винтовых тел и тел вращения; рассмотрены особенности использования сплайн-функций для построения функциональных моделей на базе теории R-функций.

Сформулирован критерий поиска особых точек R-функций, как правило – острых углов, которые в механике выступают концентраторами напряжений. Критерий имеет вид действительной функции, которая всюду неотрицательна и обращается в ноль в особых точках.

В диссертационной работе предложен проблемно-ориентированный язык для формализации моделей на базе теории R-функций в компьютерной системе математического моделирования.

Впервые на базе метода суперпозиции и принципа изоморфизма разработан метод получения дискретных математических моделей, основанных на четырехугольных элементах на плоскости и шестигранных элементах в трехмерном

пространстве, для аналитических математических моделей сложных геометрических объектов, заданных при помощи R-функций. Основная идея такого подхода заключается в использовании некоторой исходной сетки, например, равномерной, которая достаточно просто может быть построена для области, в которую помещен объект. Ячейки исходной сетки, которые являются внутренними относительно объекта, формируют начальное приближение, на базе которого затем строится слой элементов адаптированных к границе области. При этом вычислительная сложность (количество операций вычисления значения R-функции) алгоритмов на базе предложенного метода может быть оценена величиной $O(N)$. Проведенный в работе вычислительный эксперимент показал, что погрешность полученных дискретных моделей не превышает 3%.

В диссертационной работе получил дальнейшие развитие метод уточнения (сгущения) дискретных моделей, в основе которого использование двумерных и трехмерных шаблонов. Разработан универсальный шаблон уточнения с частичной рекурсией, применение которого совместно с существующими системами шаблонов позволяет уменьшить количество элементов, необходимых для моделирования особенностей конструкции. На базе разработанного универсального шаблона предложен подход к уточнению сеток шестигранных элементов, в основе которого определение кривизны границы объекта, описанного при помощи теории R-функций.

Получены новые научные результаты и разработана программная система, которая автоматизирует все основные этапы конструирования математических моделей геометрических объектов и соответствующих дискретных математических моделей; автоматизирует задачи сглаживания, сгущения (построения неравномерной сетки) и визуализации дискретных математических моделей на базе теории R-функций. Система реализована в виде программного продукта, который работает в среде операционных систем GNU/Linux и Windows (XP и выше). Разработанная программная система может быть использована и в качестве независимого программного продукта, и в качестве препроцессора для систем конечно-элементного анализа, в частности, для системы FORTU.

Полученные решения задач могут быть использованы конструкторскими организациями и наукоемкими производствами в части приложений математического моделирования геометрических объектов и вычислительных методов.

В результате исследования получено решение важной научно-технической задачи – повышения эффективности моделирования геометрических объектов. При этом получены результаты, имеющие преимущества над существующими. Ожидаемый научно-технический эффект: повышение качества визуализации моделей деталей и конструкций; снижение материалоемкости и сокращение затрат на изготовление инженерных конструкций за счет повышения точности моделирования.

Ключевые слова: R-функции, конечный элемент, дискретная модель, геометрический объект, шестигранник, четырехугольник.

ABSTRACT

Choporov S.V. Mathematical Modeling of Geometrical Objects on the Basis of R-functions. – Manuscript.

Thesis for the degree of Candidate of Technical Sciences on Specialty 01.05.02 – Mathematical Modeling and Computational Methods. – Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv, 2011.

The thesis is devoted to analytical and discrete mathematical modeling of geometrical objects on the basis of functional approach and theory of R-functions.

The method of R-functions is modified in the thesis. New functional models on the basis R-functions for complex bodies are developed in the thesis.

New geometrical models on the basis of R-functions are developed in the thesis. Domain specific language for geometrical modeling is described in the thesis.

A super position mesh generation method is proposed to create unstructured quadrilateral and hexahedral meshes automatically from functional models on the basis of R-functions.

New universal 3D-template for hexahedral mesh refinement is proposed in the thesis. Author developed the method for hexahedral mesh refinement that use R-functions for curvature definition and templates for mesh refinement in regions with increasing curvature.

New scientific results are obtained and the software for geometrical modeling of complex objects is developed.

Key words: R-function, finite element, mesh model, geometrical object, quadrilateral, hexahedral.