УДК 681.51.015.4

В.І. БЕСАРАБ, Г.О. ВОРОПАЄВА

АНАЛІТИЧНА МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНО-БЕЗПЕРЕРВНОЇ СИСТЕМИ З ЗАСТОСУВАННЯМ АПАРАТА MAX-PLUS АЛГЕБРИ

Розглядається один з варіантів розв'язку задачі побудови моделей дискретно-безперервних систем з використанням апарата MAX-PLUS алгебри. Наводиться типова структура переходу графа синхронізації ДБС. Усі твердження розглядаються на абстрактному прикладі мережі Петрі.

Вступ

Теорія дискретно-безперервних систем (ДБС) – відносно новий напрямок застосування сучасної теорії систем для широкого кола задач управління, що мають місце в технологічних виробничих процесах, телекомунікаційних мережах, транспортних і логістичних системах. Характерною особливістю таких процесів є те, що їх динаміка залежить не тільки від часу, а й зумовлена внутрішніми дискретними подіями, які супроводжують розвиток процесу [1]. Деякі автори використовують акронім ДБДС – дискретно безперервні динамічні системи, тим самим підкреслюючи фактор розвитку дискретних станів, що характеризують систему у часі [3].

Для синтезу систем управління дискретно-безперервними процесами актуальною є задача розробки аналітичних моделей ДБС, які дозволяють застосовувати при синтезі підходи, характерні для сучасної теорії управління. В рамках цієї статті розглянуто один з можливих варіантів розв'язку задачі побудови моделей таких систем з використанням апарата одного з різновидів ідемпотентної алгебри – Max-Plus алгебри [2] для графа синхронізації ДБС.

Постановка задачі досліджень

Поняття графа синхронізації дискретно-безперервних систем стосовно управління процесами в таких системах вперше було введене в теорії моделювання динаміки ДБС за допомогою апарату мереж Петрі [1]. Але формальний опис дискретно-безперервних процесів за правилами мереж Петрі не є прийнятним в рамках підходів, які використовуються в сучасній теорії управління. При застосуванні апарата Max-Plus-алгебри можна використовувати векторно-матричні рівняння, які дозволяють формалізувати представлення ДБС у формі, подібній до моделей динаміки в просторі змінних стану [4].

Типова структура окремого переходу графа синхронізації ДБС в загальному випадку представлена на рис.1.

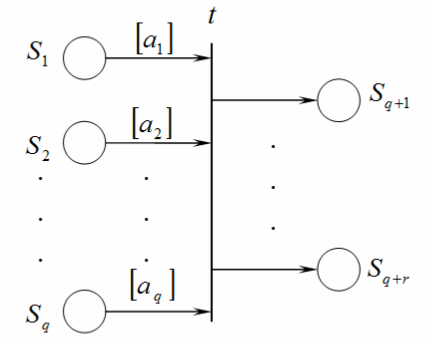

Рис. 1. Структура переходу графа синхронізації ДБС

В даному випадку розглядається перехід між станами, який має назву некерованого. Перехід в інший стан або спрацювання некерованого переключення відбувається лише тоді, коли всі стани від S_i до S_q в передобласті переходу будуть зайняті умовним маркером, як це задається часовими оцінками сповільнення процесу a_i.

Якщо в графі розглядається керований ззовні перехід, то прийнято вважати, що він відбувається при додатковій логічній умові переходу, заданій апріорі. Часова відмітка, в якій логічна умова є дійсною, позначається u і тоді для маркованих часових точок стану ДБС в післяобласті керованого переходу маємо:

$$x_j = [\bigoplus_{i=1}^{q} a_i x_i] \oplus u,\ j = q+1,\ldots,q+r\ . \tag{1}$$

Опис переміщень в графі синхронізації ДБС

Для кожного переміщення в графі синхронізації ДБС таким чином можна встановити часові точки переходу і марковані часові відмітки заняття стану в післяобласті. Розглянутий підхід для окремого переходу може бути узагальненим на всю послідовність переходів графа синхронізації ДБС. Нехай заданий деякий граф синхронізації системи з $|S|$ положеннями і P логічними зовнішніми умовами переключення переходів. Використовуючи підхід для окремого переходу (1) в цілому для графа синхронізації, можна отримати систему з *n* рівнянь:

$$\begin{array}{l} x_1 = a_{11}x_1 \oplus \ldots \oplus a_{1n}x_n \oplus b_{11}u_1 \oplus \ldots \oplus b_{1p}u_p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad , \\ x_n = a_{n1}x_1 \oplus \ldots \oplus a_{nn}x_n \oplus b_{n1}u_1 \oplus \ldots \oplus b_{np}u_p \end{array} \tag{2}$$

або у векторно-матричній формі:

$$x = A\,x \oplus B\,u\,. \tag{3}$$

При цьому: $x = [x_1 \ldots x_n]$ – вектор стану, кожний елемент x_i якого фіксує момент часу маркування (включення) переходу S_i. Вплив зовнішніх логічних умов маркування (переключення) задається за допомогою вектора керування: $u = [u_1 \ldots u_n]$.

Кожна логічна умова маркування (переключення) переходу S_i стає дійною в деякій часовій точці розвитку процесу, яка також враховується в рівняннях (2). В цьому сенсі кожний окремий елемент $u_i, i = 1,\ldots,p$ вектора управління розглядається як управляючий вплив на i-й перехід.

Значення кожного елемента a_{ij} матриці A рівняння (3) відповідає часовій оцінці передобласті переходу $T_i(S_{i,} t_k)$ з положення S_i в положення S_j, тобто характеризує часову інерційність переходу.

Якщо на переміщення t_k додатково впливає логічна умова переключення, наприклад u_r, то елемент матриці B дорівнює 0, в іншому випадку $b_{ir} = -\infty$.

Елементи матриці B таким чином вказують на ті переходи ДБС, які є керованими ззовні. В графах синхронізації переходи з одного положення в інше створюють замкнені цикли. Для того щоб відрізняти окремі цикли поведінки ДБС, всі змінні вектора стану x і вектора управління u мають індекс k, який показує, з якою частотою буде маркуватися відповідне положення в графі синхронізації, тобто $x_i(k)$ – це часова точка, в якій положення S_i. займається (маркується) k-й раз.

Для встановлення початку нового переміщення по циклу має бути визначено положення $S_{i,}$ зайняття (маркування) якого означає, що закінчено цикл k і починається k+1 цикл переміщення по графу синхронізації. Зазвичай для вибору границі початку нового циклу на графі задають початкову (стартову) позицію, відносно якої і ведуть відлік початку нового циклу. В цьому випадку в термінах змінних стану говорять про розрахунок стану $x(k+1)$ через $x_i(k)$. Якщо ж положення S_i не є стартовою позицією циклу, то $x_i(k+1)$ знаходиться через $x_j(k+1)$, тобто відносно часової відмітки в поточному циклі. Наведені ствердження для окремої стартової позиції графа синхронізації, що розглядається на рис. 1, матимуть таке представлення з урахуванням впливу зовнішнього логічного управління u:

$$x_j(k+1) = a_1 x_1(k) \oplus (\bigoplus_{i=2}^{q-1} a_j x_j(k+1)) \oplus a_q x_q(k) \oplus u(k+1).$$

Індекс зовнішнього управління прийнятий таким самим, як індекс змінних стану відповідного циклу.

Як приклад розглядається граф синхронізації, що має структуру, представлену на рис. 2.

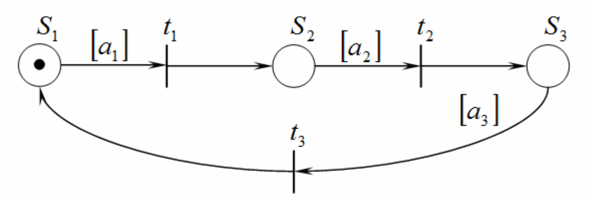

Рис. 2. Простий граф синхронізації

Як стартова позиція початку циклу умовно взята позиція S_2. Тоді система рівнянь зі змінними стану в загальному випадку матиме вигляд:

$$x(k+1) = A_0 x(k+1) \oplus A_1 x(k) \oplus Bu(k+1). \tag{4}$$

Залежно від початкового маркування позиції S_i матриця A розбивається на дві A_0 і A_1, причому:

$$A = A_0 \oplus A_1. \tag{5}$$

Матриці A_0 і A_1 визначаються із матриці A за допомогою матриць трансформації T_{A_0} і T_{A_1}. Через матриці трансформації враховуються можливі різні початкові маркування позиції S_i так:

$$(T_{A_0})_{ij} = \begin{cases} e, \text{ якщо } i = j \text{ і положення } S_i \text{ не марковане,} \\ \varepsilon - \text{ в усіх інших випадках;} \end{cases} \tag{6}$$

$$(T_{A_1})_{ij} = \begin{cases} e, \text{ якщо } i = j \text{ і положення } S_i \text{ марковане,} \\ \varepsilon - \text{ в усіх інших випадках.} \end{cases} \tag{7}$$

Тут $e = 0, \varepsilon = -\infty$ – загальноприйняті поняття в MAX-PLUS алгебрі.

З визначення матриць (6) і (7) витікає, що тільки елементи головної діагоналі матриць трансформації можуть бути відмінними від e. Сума обох матриць завжди дає одиничну матрицю.

Система рівнянь (4) може бути розв'язана відомими методами:

$$\begin{aligned} & x(k+1) = A_0 x(k+1) \oplus A_1 x(k) \oplus B u(k+1) = \\ & = A_0^2 x(k+1) \oplus A_0 A_1 x(k) \oplus A_0 B u(k+1) \oplus A_1 x(k) \oplus B u(k+1) = \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & = A_0^n x(k+1) \oplus [A_0^{n-1} \oplus \ldots \oplus A_0 \oplus I] A_1 x(k) \oplus [A_0^{n-1} \oplus \ldots \oplus A_0 \oplus I] B u(k+1). \end{aligned} \tag{8}$$

Введемо позначення: $A_0^* = I \oplus A_0 \oplus A_0^2 \oplus \ldots \oplus A_0^{n-1}$, $M = A_0^* A_1$; рівняння (8) спрощується:

$$x(k+1) = Mx(k) \oplus A_0^* Bu(k+1) \cdot \tag{9}$$

В цьому випадку матриця M може розглядатися як матриця динаміки системи без зовнішнього керування – динамічна характеристика вільної поведінки системи:

$$x(k+1) = M x(k).$$

Динамічні характеристики ДБС залежать від структури і властивостей матриці M. Початково марковані позиції графа синхронізації завжди розглядаються як вершини графа $G(M)$, які мають тільки вихідні ребра, і тому очевидно, що для кожного початково маркованого положення S_i графа синхронізації в матриці A_1 є хоча б один елемент в стовпці $(A_1)_{\bullet j}$, відмінний від ε, що говорить про те, що існує наступне положення S_k, в яке обов'язково переходить система з положення S_i. Якщо ж положення S_i не є початково маркованим, то j-й стовпець матриці $(A_1)_{\bullet j}$ має тільки елементи ε.

Поведінку в часі некерованого графа синхронізації можна дослідити за допомогою рівняння (9), якщо задані початкові умови $x(0)$. З урахуванням того, що циклічність критичного графа $G^C(M)$ дорівнює 1, існує число K, таке що:

$$\forall k \geq K : M^k = \lambda^k Q,$$

звідки випливає $x(k) = \lambda^k Q x(0) = \lambda^k \nu$.

На основі цього співвідношення можна стверджувати, що поведінка графа синхронізації для будь-яких початкових умов визначається сталим станом через деяку кількість пробігів по циклу залежно від власного вектора ν матриці M.

В загальному випадку:

$$\forall k \geq K : M^{k-\rho} = \lambda^\rho M^k,$$

$$x(k+\rho) = M^{k+\rho} x(0) = \lambda^\rho x(k),$$

тобто залежно від циклічності ρ графа $G^C(M)$ заняття відповідних позицій графа синхронно повторюється після λ^ρ одиниць часу.

Прийнято вважати, що для $k < K$ відповідні позиції займаються в нерегулярні часові проміжки, і цей період може розглядатись як перехідний процес в системі (рис.3):

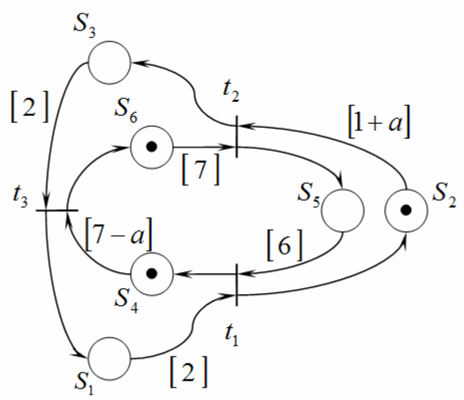

Рис. 3. Граф синхронізації мережі Петрі для абстрактного прикладу

Для ілюстрації наведених тверджень розглянемо абстрактний приклад. Нехай ДБС має шість операційних позицій $S_1, \ldots, S_6$, три з яких S_2, S_4, S_6 – є початково маркованими.

Спочатку часовий параметр затримки a покладаємо рівним 0. В цьому випадку матриця динаміки A матиме вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 2 & 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 7 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

З урахуванням відсутності додаткових логічних умов переключення немає необхідності в матриці B. З урахуванням (9) знаходимо A_0^* і M:

$$A_0^* = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 0 & 4 & \varepsilon & 6 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 4 & 0 & 6 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \varepsilon & 3 & \varepsilon & 7 & \varepsilon & 9 \\ \varepsilon & 7 & \varepsilon & 9 & \varepsilon & 13 \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 \\ \varepsilon & 7 & \varepsilon & 9 & \varepsilon & 13 \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & 7 & \varepsilon & 9 \end{bmatrix}.$$

Структура графа $G(M)$ матиме вигляд (рис.4):

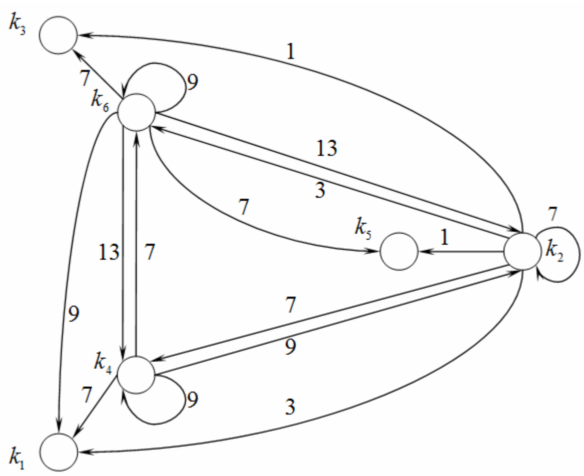

Рис. 4. Граф $G(M)$

Критичний граф $G^C(M)$ представлений на рис. 5.

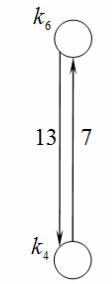

Рис. 5. Критичний граф $G^C(M)$

Середня вага критичного циклу є власне число матриці $M - \lambda = (13+7)/2 = 10$ одиниць часу.

Можна перевірити достовірність цього результату і за допомогою будь-якого з алгоритмів формального знаходження λ для матриці M. Для власного числа матриці M існує власний вектор: $v = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$.

При цьому перехідний процес закінчується для будь-яких початкових умов власним станом ДБС.

Поведінку графа синхронізації ДБС можна більш наочно пояснити за допомогою графіків, представлених на рис. 6.

З рис.6 видно, що проміжок часу між k -м і $(k+1)$ -м маркуваннями в період перехідного процесу може бути більшим, ніж власне число λ матриці M. Після закінчення перехідного режиму маркування позиції відбувається почергово через 9 і 11 одиниць часу. Середнє значення цього часового проміжку точно дорівнює власному числу матриці M.

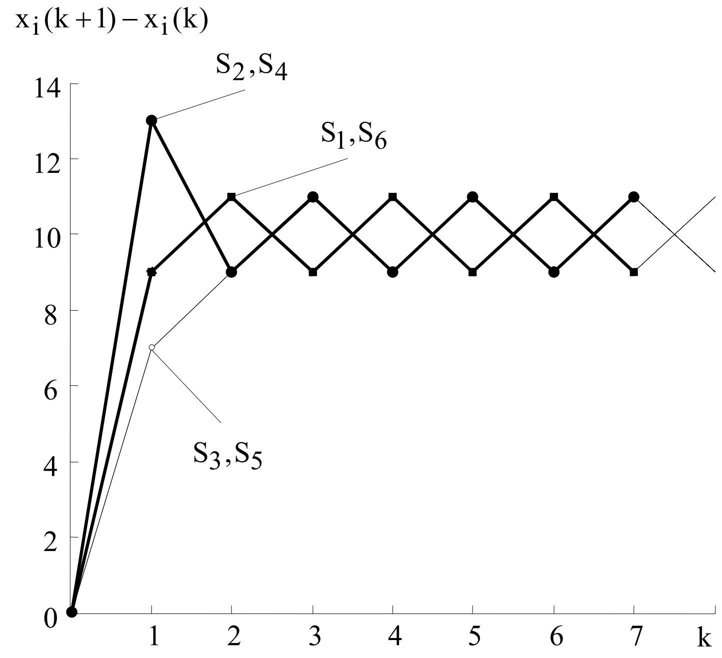

Рис. 6. Перехідний процес в ДБС при циклічності $\rho = 2$

Якщо змінити динаміку графа синхронізації, умовно прийнявши, що параметр $a = 2$ в графі на рис. 3, одержимо нову матрицю:

$$M' = \begin{bmatrix} \varepsilon & 5 & \varepsilon & 5 & \varepsilon & 9 \\ \varepsilon & 9 & \varepsilon & 7 & \varepsilon & 13 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 \\ \varepsilon & 9 & \varepsilon & 7 & \varepsilon & 13 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & 5 & \varepsilon & 9 \end{bmatrix}$$

з власним числом $\lambda = 9$ і власним вектором $\nu = [2 \quad 6 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad 2]^T$, крім того, циклічність графа зміниться на $\rho = 1$.

Графічна інтерпретація поведінки ДБС в динаміці наочно проілюстрована на рис. 7.

Впродовж часу між k і (k+1) маркуваннями часовий відрізок може змінюватись (коливатись). Ця поведінка може трактуватись як перехідний процес в ДБС.

Якщо має місце $k \geq K$, то позиції маркуються через регулярні проміжки часу. Виникає послідовність маркувань, що повторюється залежно від циклічності графа $G(M)$. Якщо для критичного графа $G^C(M)$ циклічність $\rho = 1$, то проміжок часу між k і $k+1$ маркуваннями складає точно λ одиниць часу. Поведінка ДБС на цьому етапі може розглядатись як власний усталений стан, або коротко – власний стан ДБС.

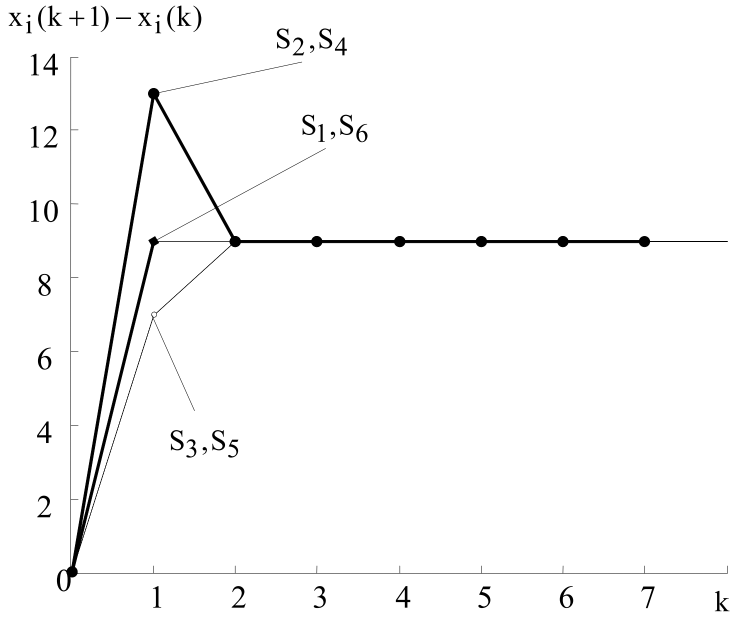

Рис. 7. Перехідний процес в ДБС при циклічності $\rho = 1$

Висновки

1. Аналітична модель представлення графа синхронізації ДБС дозволяє розглядати модель у формі, подібній до представлення за допомогою рівнянь стану процесу в сучасній теорії управління.

2. Динаміка ДБС залежить від властивостей матриці динаміки ДБС, зокрема перехідний процес визначається через власне число цієї матриці.

3. Встановлено зв'язок між показником циклічності критичного графа матриці динаміки ДБС і станом процесу, який може трактуватись як усталений стан системи.

4. Представлена модель динаміки ДБС дозволяє використовувати її для синтезу системи управління дискретно-безперервним процесом з заданими показниками якості, але в рамках цього дослідження задача синтезу не розглядається.

Список літератури: **1.** *Бесараб В.І.* Використання апарата „MAX-PLUS" для моделювання динаміки в інформаційних мережах із простою топологією / В.І. Бесараб, Є.Г. Коваленко// Наукові праці Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова. Вип. 44. Київ, 2007. С. 59-62. **2.** *David R.* Petri Nets and Grafcet: Tools for Modeling discrete event Systems/ R. David, H. Alla. London: Prentice Hall, 1992. ISBN: 0-13-327537-X. **3.** *Cassandras C. G.* Introduction to Discrete event Systems/ C.G. Cassandras, S. Lafortune. – Kluwer academic Publishers, 1999. **4.** *Cunnindham-Green R.* Minimax Algebra and applications/ R. Cunnindham-Green// advanced in Imaging and Electron Physics. Vol. 90. New York: Academic Press, 1995. P. 1-121.

Надійшла до редколегії 15.10.2010

Бесараб Володимир Іванович, канд. техн. наук, доцент, завідувач кафедри АТ ДонНТУ. Наукові інтереси: транспортні мережі SDH/PDH; методи аналізу динаміки телекомунікаційних мереж. Хобі: охота. Адреса: Україна, 83000, Донецьк, вул. Артема, буд. 58, тел. 062 332 55 37.

Воропаєва Ганна Олександрівна, асистент кафедри АТ ДонНТУ. Наукові інтереси: методи оптимізації та управління розподіленими телекомунікаційними мережами. Хобі: аналіз динаміки функціонування об'єкта телекомунікацій. Адреса: Україна, 83000, Донецьк, вул. Артема, буд. 58, тел. 062 334 11 72.