

ПОЛІНОМІАЛЬНЕ ОЦІНЮВАННЯ ФАЗИ РАДІОСИГНАЛУ ПРИ АСИМЕТРИЧНО-ЕКСЦЕСНІЙ МУЛЬТИПЛІКАТИВНІЙ ЗАВАДІ

КОВАЛЬ В.В., ГАВРИШ О.С., ЗАБОЛОТНИЙ С.В.

Описуються синтезовані алгоритми вимірювання (статистичного оцінювання) фази радіосигналу, що приймається на фоні мультиплікативної завади. Розраховуються оптимальні коефіцієнти рівнянь для знаходження поліноміальних оцінок фази радіосигналу і знаходяться та аналізуються аналітичні вирази дисперсій цих оцінок.

Вступ

В радіолокації та радіонавігації типовою є задача вимірювання фази радіосигналу, що приймається на фоні завад [1]. Традиційною є модель адитивної взаємодії корисного сигналу і завади, проте в ряді випадків більш адекватним є мультиплікативний характер взаємодії [2-4].

При використанні мультиплікативної завади застосовуються імовірнісні моделі з законами розподілу Релея, Райса, Накагамі, Вейбулла, логарифмічно нормальним гама-розподілом і т.ін. [2, 5]. З точки зору врахування негаусовості завади достатньо гнучким і простим є кумулянтний опис випадкової величини [6]. Ефективним інструментом аналітичного опрацювання зазначених моделей є метод Кунченка (метод максимізації полінома (ММП)), заснований на використанні поліноміальних перетворень вхідної випадкової послідовності [7].

Відхід від моделей, що базуються на використанні щільностей розподілу імовірностей, і застосування більш простих і універсальних моделей, заснованих на використанні кінцевої послідовності кумулянтних коефіцієнтів, дозволяють синтезувати нові алгоритми оцінювання фази радіосигналу при мультиплікативній заваді.

Мета даної роботи полягає в синтезі поліноміальних алгоритмів оцінки фази радіосигналу при впливі мультиплікативних асиметрично-ексцесних завад [7] при степенях $s = \overline{1,2}$. Для досягнення мети в роботі розв'язуються такі задачі:

- будуються моделі мультиплікативної взаємодії сигналу і завади на основі моментно-кумулянтного опису;
- здійснюється розрахунок оптимальних (з точки зору точнісних характеристик, що можуть бути досягнуті) коефіцієнтів рівнянь, з яких знаходяться оцінки фази радіосигналу;
- знаходяться і досліджуються аналітичні вирази для дисперсій оцінок фази радіосигналу, знайдених при різних степенях полінома.

Постановка задачі

Нехай на вхід приймача потрапляє сигнал, що представляє мультиплікативну суміш радіосигналу $S(t, \varphi)$ і завади $\eta(t)$:

$$x(t) = \eta(t) \cdot S(t, \varphi).$$

При цифровому опрацюванні вхідного сигналу на інтервалі часу $t \in [0; T]$ в розпорядженні спостерігача буде вибірка об'ємом n незалежних неоднаково розподілених вибіркових значень $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ з генеральної сукупності значень випадкової величини виду

$$x_v = \eta_v \cdot S_v(\varphi), \quad (1)$$

де η_v – випадкова величина з математичним сподіванням a , дисперсією κ_2 , коефіцієнтами асиметрії γ_3 та ексцесу γ_4 .

У виразі (1) корисний сигнал $S_v(\varphi)$ розглядається радіосигнал

$$S_v(\vartheta) = A e_v \cos(2\pi f \delta v + \varphi), \quad (2)$$

де A, f, φ – відповідно амплітуда, частота та початкова фаза сигналу; e_v – обвідна радіосигналу; δ – постійний період дискретизації; v – відліки часу спостереження.

Будемо вважати, що значення параметрів завади і сигналу, які не підлягають оцінці, є незмінними й апріорно відомими.

Для синтезу поліноміальних алгоритмів методом максимізації полінома степені s необхідно знати початкові моменти $2s$ -го порядку досліджуваної випадкової величини (1). Легко показати, що початкові моменти вхідної послідовності (1) мають вигляд

$$m_{1v} = a S_v, \quad m_{2v} = (\kappa_2 + a^2) S_v^2, \\ m_{3v} = (\kappa_2^{1.5} \gamma_3 + 3a \kappa_2 + a^3) S_v^3, \quad (3)$$

$$m_{4v} = (\kappa_2^2 (\gamma_4 + 3) + 4a \kappa_2^{1.5} \gamma_3 + 6a^2 \kappa_2 + a^4) S_v^4.$$

З виразів (3) легко можуть бути знайдені центровані корелянти

$$F_{(i,j)v} = m_{(i+j)v} - m_{iv} m_{jv}. \quad (4)$$

Крім того, для обчислення оптимальних коефіцієнтів необхідно знайти похідні від перших двох початкових моментів:

$$\frac{d}{d\varphi} m_{1v} = -a B_v, \quad \frac{d}{d\varphi} m_{2v} = -2(\kappa_2 + a^2) S_v B_v, \quad (5)$$

$$\text{де} \quad B_v = \frac{d}{d\varphi} S_v = A e_v \sin(2\pi f \delta v + \varphi).$$

Отримані результати

Класична оцінка фази радіосигналу методом найменших квадратів

Згідно з методом найменших квадратів (МНК), як оцінка вибирається таке значення $\hat{\theta}$, при якому досягається мінімум суми квадратів

$$L(\bar{x}; \theta) = \sum_{v=1}^n (x_v - m_{1v}(\theta))^2.$$

Тоді для відшукування оцінки методом найменших квадратів необхідно розв'язати рівняння

$$\frac{d}{d\theta} L(\bar{x}; \theta) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0.$$

Легко показати, що оцінка фази радіосигналу знаходиться з розв'язку рівняння

$$\sum_{v=1}^n B_v [x_v - aS_v] \Big|_{\varphi=\hat{\varphi}} = 0, \quad (6)$$

з якого оцінка може бути виражена у явному вигляді (при певних обмеженнях на крок дискретизації):

$$\hat{\varphi}_0 = -\arctg \frac{\sum_{v=1}^n [x_v e_v \sin(\omega_0 v \delta)]}{\sum_{v=1}^n [x_v e_v \cos(\omega_0 v \delta)]}. \quad (7)$$

Дисперсія оцінки (7) дорівнює

$$\sigma_{\hat{\varphi}}^2 = \frac{1}{q \sum_{v=1}^n \text{tg}^2(\omega_0 \delta v + \varphi)}, \quad (8)$$

де $q = a^2 / \kappa_2$.

Лінійний алгоритм, отриманий ММП при степені $s = 1$

При степені полінома $s=1$ оцінка параметра φ радіосигналу знаходиться із розв'язку рівняння

$$\sum_{v=1}^n k_{1v}(\varphi) [x_v - aS_v] \Big|_{\varphi=\hat{\varphi}} = 0, \quad (9)$$

де ваговий коефіцієнт $k_{1v}(\varphi) = -aB_v / \kappa_2 S_v^2$.

Підставляючи коефіцієнт в рівняння (9), отримаємо

$$\sum_{v=1}^n \frac{B_v}{S_v^2} [x_v - aS_v] \Big|_{\varphi=\hat{\varphi}} = 0. \quad (10)$$

Рівняння (10) для знаходження оцінки шуканого параметра методом максимізації полінома при $s = 1$ дещо відрізняється від рівняння виду (6), отриманого методом найменших квадратів. При цьому оцінка $\hat{\varphi}$ не може бути виражена в явному вигляді, а для її знаходження необхідно використовувати чисельні методи.

Для знаходження дисперсії оцінки при $s = 1$ необхідно знайти кількість добутої інформації

$$J_{1n}(\varphi) = \sum_{v=1}^n k_{1v}(\varphi) \frac{dm_{1v}(\varphi)}{d\varphi} = q \sum_{v=1}^n \text{tg}^2(\omega_0 \delta v + \varphi). \quad (11)$$

Відповідно асимптотична дисперсія оцінки, знайденої з розв'язку рівняння (10), має вид, аналогічний виразу (8).

Квадратичний алгоритм, отриманий ММП при степені $s = 2$

При степені полінома $s=2$ оцінка фази $\hat{\varphi}$ знаходиться із розв'язку рівняння максимізації полінома виду

$$\sum_{v=1}^n k_{1v}(\varphi) [x_v - aS_v] + \sum_{v=1}^n k_{2v}(\varphi) [x_v^2 - (\kappa_2 + a^2) S_v^2] \Big|_{\varphi=\hat{\varphi}} = 0, \quad (12)$$

в якому оптимальні коефіцієнти $k_{1v}(\varphi)$ та $k_{2v}(\varphi)$ знаходяться з розв'язку системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь виду

$$\begin{cases} k_{1v}(\varphi) F_{(1,1)v}(\varphi) + k_{2v}(\varphi) F_{(1,2)v}(\varphi) = -aB_v, \\ k_{1v}(\varphi) F_{(1,2)v}(\varphi) + k_{2v}(\varphi) F_{(2,2)v}(\varphi) = -2(\kappa_2 + a^2) S_v B_v. \end{cases} \quad (13)$$

Використовуючи вирази (3), (4), знаходимо

$$\begin{aligned} k_{1v}(\varphi) &= -\frac{1}{\Delta_{2v}} \kappa_2^2 S_v^4 B_v (2q\gamma_3 + \sqrt{q}(\gamma_4 - 2) - 2\gamma_3), \\ k_{2v}(\varphi) &= \frac{1}{\Delta_{2v}} \kappa_2^2 S_v^3 B_v (\sqrt{q}\gamma_3 - 2), \end{aligned} \quad (14)$$

де $\Delta_{2v} = S_v^6 \kappa_2^3 (\gamma_4 + 2 - \gamma_3^2)$ – головний визначник системи рівнянь (13).

Підставивши отримані коефіцієнти (14) у вираз (12), отримаємо рівняння відносно шуканого параметра $\hat{\varphi}$, яке розв'язується чисельними методами.

Кількість добутої інформації при $s=2$ описується виразом

$$J_{2n}(\varphi) = \frac{q(\gamma_4 + 2) - 4\sqrt{q}\gamma_3 + 4}{\gamma_4 + 2 - \gamma_3^2} \sum_{v=1}^n \text{tg}^2(\omega_0 \delta v + \varphi). \quad (15)$$

Асимптотична дисперсія оцінки є величиною, оберненою до кількості добутої інформації і при $s = 2$ дорівнює

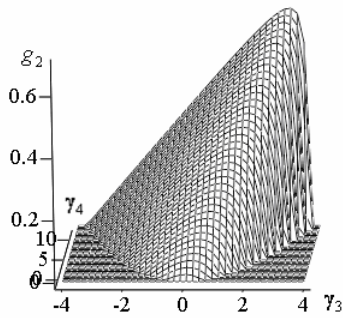
$$\sigma_{2n\hat{\varphi}}^2 = \frac{g_2}{q \sum_{v=1}^n \text{tg}^2(\omega_0 \delta v + \varphi)} = g_2 \sigma_{1n\hat{\varphi}}^2, \quad (16)$$

де

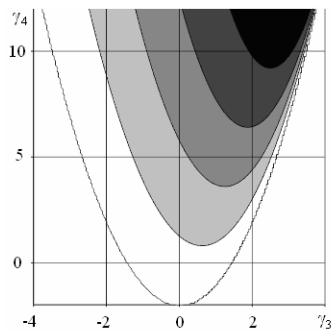
$$g_2 = \frac{(\gamma_4 + 2 - \gamma_3^2)q}{q(\gamma_4 + 2) - 4\sqrt{q}\gamma_3 + 4}. \quad (17)$$

З виразу (16) видно, що з ростом степені полінома, дисперсія буде змінюватися в g_2 разів. Коефіцієнт g_2 є функцією параметрів мультиплікативної завади і не залежить від корисного сигналу. На рис.1-3, для різних значень q , зображено об'ємні графіки залежності коефіцієнта g_2 від параметрів завади γ_3 і γ_4 та їх

проекції на площину (чим світліша область на рис. 1,б-3,б, тим вища ефективність оцінок при $s = 2$).

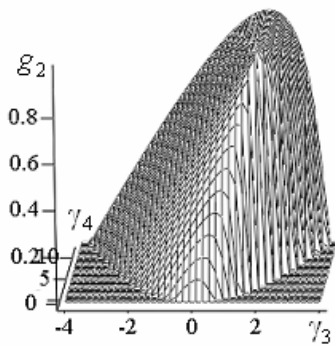


а

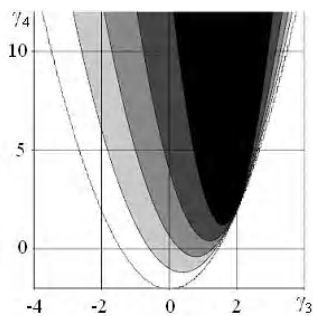


б

Рис.1. Графік поверхні коефіцієнта g_2 (а) та її проекція на площину (б) при $q = 0,2$

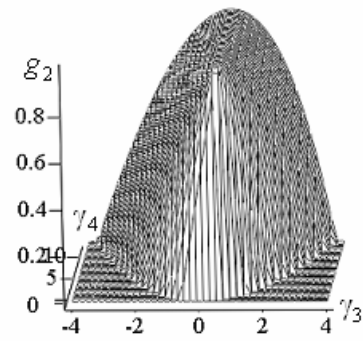


а

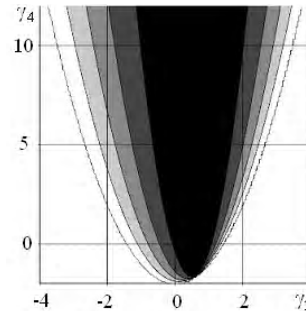


б

Рис. 2. Графік поверхні коефіцієнта g_2 (а) та її проекція на площину (б) при $q = 1$



а



б

Рис.3. Графік поверхні коефіцієнта g_2 (а) та її проекція на площину (б) при $q = 10$

Показано, що величина g_2 завжди лежить в інтервалі $(0;1]$, якщо між кумулянтними коефіцієнтами виконується нерівність $\gamma_3^2 \leq \gamma_4 + 2$, яка визначає область допустимих значень цих параметрів [6]. Очевидно, що чим менше значення g_2 , тим більша відмінність дисперсії оцінки при $s = 2$ порівняно з дисперсією при $s = 1$. З графіків видно, що при зміні параметра, q вершина поверхні (описує найнижчу ефективність оцінки) зміщується одночасно по двох координатах. При малих значеннях q поверхня має асиметричну форму, а ефективність оцінок буде високою в більшій частині області визначення, і навпаки, з ростом q поверхня стає більш симетричною відносно γ_3 .

Висновки

Синтезовано нові алгоритми оцінки фази радіосигналу в умовах впливу мультиплікативної негаусівської завади, яка описується послідовністю кумулянтів до 4-го порядку. Розроблені алгоритми є оптимальними в класі поліноміальних перетворень заданої степені. Для забезпечення оптимальності було розраховано аналітичні вирази вагових коефіцієнтів рівнянь максимізації полінома при $s=1,2$, з розв'язку яких знаходяться оцінки шуканого параметра.

За допомогою об'ємних графіків показано динаміку зменшення дисперсії оцінки з ростом степені полінома для різних сполучень параметрів мультиплікативної завади. В цілому, можна стверджувати, що з ростом степені полінома точність оцінки фази радіосигналу

зростає. Конкретне значення, що характеризує зменшення дисперсії, залежить від імовірнісних характеристик мультиплікативних завад.

Література: 1. *Сосулин Ю.Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радио и связь, 1992. 304 с. 2. *Евсеев В.В., Бессонов И.В., Халин В.А., Егоров М.П.* Обобщенная вероятностная модель мультипликативной помехи в канале связи // Материалы VII международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь». Том 2. Воронеж, 2001. С. 700-708. 3. *Васильев К.К.* Приём сигналов при мультипликативных помехах. Изд-во Сарат. ун-та, 1983. 128 с. 4. *Шелухин О.И.* Негауссовские процессы в радиотехнике. М.: Радио и связь, 1998. 310 с. 5. *Радиоэлектронные системы: Основы построения и теория.* Справочник. Изд. 2-е, перераб. и доп. / Под ред. Я.Д.Ширмана. М.: Радиотехника, 2007. 512 с. 6. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ негауссовских случайных процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978. 376с. 7. *Кунченко Ю.П.* Полиномиальные оценки параметров, близких к гауссовским случайных величин. Часть 1. Стохастические полиномы, их свойства и применение для нахождения оценок параметров. Черкасы: ЧИТИ, 2001. 133 с.

Поступила в редколлегию 15.03.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Снитюк В.Є.

Коваль Віталій Володимирович, заступник завідуючого кафедри «Інформаційних технологій та економічної кібернетики» Східноєвропейського університету економіки та менеджменту. Наукові інтереси: статистична обробка сигналів. Адреса: Україна, 18036, Черкаси, вул. Нечуя-Левицького, 16, E-mail: vitkoval@ukr.net

Гавриш Олександр Степанович, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри радіотехніки Черкаського державного технологічного університету. Наукові інтереси: статистична обробка сигналів. Адреса: Україна, 18006, Черкаси, бул. Шевченка, 406, тел. (0472)730261, E-mail: hackee74@yahoo.com

Заболотній Сергій Васильович, канд. техн. наук, доцент кафедри радіотехніки Черкаського державного технологічного університету. Напрямок наукової діяльності - статистична обробка сигналів. Адреса: Україна, 18006, м. Черкаси, бул. Шевченка, 406, тел. (0472)730261 E-mail: zabolotni@ukr.net