Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет радіоелектроніки

ФІЛІПКОВСЬКА МАРІЯ СЕРГІЇВНА

УДК 517.922:537.8 + 519.6

ГЛОБАЛЬНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ НЕЛІНІЙНИХ РАДІОТЕХНІЧНИХ КІЛ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2015

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті ім. В.Н. Каразіна, Міністерство освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор,
Руткас Анатолій Георгійович,
професор кафедри прикладної математики,
Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор,
Лучанінов Анатолій Іванович,
професор кафедри основ радіотехніки,
Харківський національний університет радіоелектроніки;

кандидат фізико-математичних наук, професор,
Ємець Єлизавета Михайлівна,
завідувач кафедри економічної кібернетики,
Полтавський університет економіки і торгівлі.

Захист відбудеться “ 29 ” грудня 2015 р. о 14^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.052.02 у Харківському національному університеті радіоелектроніки за адресою: 61166, м. Харків, пр. Леніна, 14.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Харківського національного університету радіоелектроніки за адресою: 61166, м. Харків, пр. Леніна, 14.

Автореферат розісланий “ 28 ” листопада 2015 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
кандидат технічних наук, доцент Л.В. Колесник

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Результати дослідження конкретних математичних моделей у радіотехніці, економіці, теорії керування, робототехніці свідчать, що важливими для практики є класи моделей з напівлінійними диференціально-алгебраїчними рівняннями, в яких лінійна частина характеризується регулярним або сингулярним матричним жмутком. Такі рівняння виникають при математичному моделюванні динаміки фізичних, економічних і технічних процесів та об'єктів через наявність алгебраїчних зв'язків між координатами вектора стану.

Диференціально-алгебраїчні рівняння вивчались багатьма авторами, серед яких S.L. Campbell, L.R. Petzold, P. Kunkel, V. Mehrmann, R. März, E. Hairer, C. Lubich, M. Roche, G. Wanner, R. Riaza, Ю.Є. Боярінцев, А.Г. Руткас, Л.А. Власенко, А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк, В.П. Яковець, А.Г. Баскаков, В.Ф. Чистяков, А.А. Щеглова. Переважна кількість відомих на даний час робіт присвячена дослідженню локальної розв'язності диференціально-алгебраїчних рівнянь та знаходженню їх чисельних розв'язків на деякому достатньо малому інтервалі часу. У роботах A. Pazy, Л.А. Власенко, Ю.Є. Гліклiха наведено теореми про глобальну розв'язність диференціально-алгебраїчних рівнянь, які містять глобальну умову Ліпшиця для нелінійної частини рівняння, проте ця умова є надто обмежуваною для багатьох прикладних задач. Наприклад, наявність кубічних нелінійних опорів та провідностей у радіотехнічних колах, як правило, допускає існування глобальних за часом розв'язків і їх стійкість, тоді як глобальна умова Ліпшиця тут не виконана.

Математичні результати про глобальну розв'язність диференціально-алгебраїчних рівнянь становлять інтерес для теорії динамічних систем та прикладного програмування. Наявність глобального за часом розв'язку гарантує достатньо довгий термін безперебійного функціонування реальної системи, що досліджується. Теоретично доведене існування точного глобального розв'язку дозволяє коректно застосувати чисельний метод для знаходження наближеного розв'язку на будь-якому заданому відрізку часу.

При проектуванні та синтезі конкретних систем і процесів використовуються ознаки обмеженості та стійкості розв'язків відповідних еволюційних рівнянь. Обмеженість кожного розв'язку рівняння на всій області визначення називається стійкістю за Лагранжем. Ж. Ла-Салем запропоновано метод дослідження стійкості за Лагранжем звичайних диференціальних рівнянь, що є розвитком прямого методу Ляпунова. Структурну стійкість лінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь розглядали, наприклад, L. Dai, Ю.Є. Боярінцев, стійкість напівлінійних рівнянь даного типу не досліджена.

Таким чином, дослідження глобальної розв'язності, стійкості та нестійкості за Лагранжем напівлінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь й аналіз математичних моделей з відповідними рівняннями є актуальним завданням як у теоретичному, так і в прикладному аспектах, зокрема, при математичному моделюванні динаміки нелінійних радіотехнічних кіл, виробництва корпорації підприємств, потоків у мережах, міжгалузевого балансу економіки, робототехнічних, механічних і керованих систем.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках наукових досліджень, які проводились у Харківському національному університеті ім. В.Н. Каразіна. Основні наукові результати отримано в ході виконання НДР «Аналіз еволюційних задач з рівняннями типу Соболєва» (№ ДР 0111U010369, 2012–2014 рр.), у якій автор приймала участь як виконавець.

Мета і задачі дослідження. *Метою* роботи є отримання умов глобальної розв’язності, стійкості та нестійкості за Лагранжем напівлінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь без використання глобальних умов Ліпшиця, розробка методу їх чисельного розв’язання на будь-якому заданому відрізку часу; дослідження глобальної динаміки математичних моделей нелінійних радіотехнічних кіл.

Для досягнення поставленої мети розв’язуються наступні *задачі:*

– сформулювати і довести теореми існування та єдиності глобального розв’язку задачі Коші для напівлінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь без застосування обмежень типу глобальної умови Ліпшиця;

– сформулювати і довести теореми про стійкість та нестійкість за Лагранжем напівлінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь;

– побудувати математичні моделі нелінійних радіотехнічних кіл із зосередженими параметрами та застосувати отримані теоретичні результати до дослідження їх динаміки;

– розробити чисельний метод знаходження розв’язків напівлінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь на будь-якому заданому відрізку часу та провести чисельний аналіз отриманих математичних моделей.

Об’єкт дослідження – напівлінійні диференціально-алгебраїчні рівняння та математичні моделі нелінійних радіотехнічних кіл.

Предмет дослідження – існування, єдиність та стійкість глобальних розв’язків напівлінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь, перехідні процеси у нелінійних радіотехнічних колах.

Методи дослідження. При доведенні теорем застосовуються метод продовження розв’язків з використанням диференціальних нерівностей і функцій типу Ляпунова та Ла-Саля, теореми про неявну функцію, спеціальні блокові зображення сингулярного операторного жмутка та його компонент, дискретний варіант нерівності Гронуола, запропонований А.Г. Руткасом метод спектральних проекторів типу Ріса. Для розробки чисельного методу використовуються явна схема Ейлера, формула Тейлора і метод спектральних проекторів типу Ріса.

Наукова новизна отриманих результатів.

1. Набув подальшого розвитку метод продовження розв’язків звичайного диференціального рівняння з використанням диференціальних нерівностей і функцій типу Ляпунова та Ла-Саля, а саме, отримано узагальнення теореми Ла-Саля про необмежену продовжуваність розв’язків, яке ослаблює обмеження на нелінійну частину рівняння.

2. Запропоновано нову блокову структуру операторних коефіцієнтів сингулярних диференціально-алгебраїчних рівнянь та метод її побудови, які доповнюють дослідження щодо блокових структур сингулярного жмутка операторів у скінченновимірних просторах і дозволяють звести вихідне рівняння

до системи із суто диференціальних та суто алгебраїчних рівнянь.

3. Сформульовано і доведено нові теореми існування та єдиності глобального розв'язку задач Коші для звичайного напівлінійного диференціального рівняння та напівлінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь з регулярним і сингулярним характеристичними жмутками. Теореми не містять обмежень типу глобальної умови Ліпшиця, що дозволяє отримувати умови глобальної розв'язності рівнянь динаміки для більш широких класів прикладних задач, у яких виникають нелінійні математичні моделі з диференціальними та диференціально-алгебраїчними рівняннями.

Отримано нові теореми, які дають достатні умови існування глобального розв'язку недовизначеної системи та достатні умови існування та єдиності глобального розв'язку перевизначеної системи диференціально-алгебраїчних рівнянь. Ці теореми є окремими випадками теореми існування та єдиності глобального розв'язку задачі Коші для диференціально-алгебраїчного рівняння з сингулярним жмутком довільного рангу.

4. Вперше сформульовано і доведено теореми про стійкість та нестійкість за Лагранжем напівлінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь з регулярним і сингулярним характеристичними жмутками. Теореми дають достатні умови існування та єдиності глобального розв'язку, який є обмеженим на всій області визначення, і розв'язку, який має скінчений час визначення.

5. Для побудованих математичних моделей нелінійних радіотехнічних пристроїв вказано обмеження, які забезпечують гладку детерміновану еволюцію станів (перехідних режимів) на нескінченному інтервалі часу, та умови, за яких відповідні диференціально-алгебраїчні рівняння стійкі за Лагранжем. Вказаним обмеженням задовольняють певні нелінійні функції, які не є глобально ліпшицевими, що дозволяє гарантувати існування і обмеженість глобальних розв'язків рівнянь динаміки для більш широких класів нелінійних систем.

Аналогічні твердження справедливі для математичних моделей низки інших систем і процесів, зокрема, систем керування, потоків у мережах, виробничо-економічних, робототехнічних і механічних систем, у яких виникають подібні диференціально-алгебраїчні рівняння.

6. Розроблено та обґрунтовано новий чисельний метод знаходження розв'язків напівлінійного диференціально-алгебраїчного рівняння (з регулярним характеристичним жмутком) з урахуванням отриманих умов існування та єдиності глобального розв'язку. Наближений розв'язок обчислюється на будь-якому заданому відрізку часу. У порівнянні з відомими методами розв'язання рівнянь даного типу в розробленому методі ослаблено обмеження на нелінійну частину рівняння та її частинні похідні. Також ефективність методу зумовлена можливістю чисельно знаходити спектральні проектори типу Ріса, за допомогою яких вихідне рівняння зводиться до системи із суто диференціального й алгебраїчного рівнянь.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації можуть бути використані для дослідження математичних моделей з напівлінійними диференціальними рівняннями та диференціально-алгебраїчними рівняннями, в яких лінійна частина характеризується регулярним або сингулярним матричним жмутком. Такі моделі виникають у нелінійній радіотехніці, економіці, теорії керування, робототехніці та інших галузях науки і техніки.

Отримано умови існування та єдиності глобального розв'язку, наявність якого гарантує достатньо довгий термін безперебійного функціонування реальної системи, що досліджується. У доведених теоремах не використовуються вимоги типу глобальної умови Ліпшиця для нелінійної частини рівняння, що дає можливість застосовувати отримані теоретичні результати до більш широких класів прикладних задач.

Результати про глобальну розв'язність диференціальних рівнянь становлять інтерес для теоретичних досліджень у комбінаториці, оскільки твірні функції для багатьох комбінаторних послідовностей задовольняють певні диференціальні рівняння.

Результати, отримані при дослідженні математичних моделей нелінійних радіотехнічних кіл, можуть бути застосовані для аналізу математичних моделей інших систем, у яких виділяються структурна геометрія у формі модельного графа і параметри складових елементів, зокрема, при вивченні складних механічних систем із зосередженими масами, математичних моделей кристалічних решіток і потоків у мережах.

Розроблений чисельний метод дозволяє знаходити наближені розв'язки напівлінійного диференціально-алгебраїчного рівняння на будь-якому заданому відрізку часу. Теоретично доведене існування точного глобального розв'язку гарантує коректність чисельного методу.

Результати дисертаційних досліджень використані при підготовці курсових і дипломних робіт та викладанні лекційних і практичних занять, що підтверджено актом впровадження в навчальний процес Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертаційної роботи отримано автором особисто та опубліковано у роботах [1–18]. У роботах, що опубліковані у співавторстві, особистий вклад автора полягає в наступному: у [2] сформульовано і доведено теорему існування та єдиності глобального розв'язку задачі Коші для напівлінійного диференціально-алгебраїчного рівняння з регулярним характеристичним жмутком; у [3] побудовано математичні моделі нелінійних радіотехнічних фільтрів та встановлено умови гладкої детермінованої еволюції станів на нескінченному інтервалі часу; у [12] викладено теорему існування та єдиності глобального розв'язку задачі Коші для напівлінійного диференціально-алгебраїчного рівняння і результати її застосування.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на міжнародних конференціях, семінарі: міжнародні конференції «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» (м. Харків, 2011–2013 рр.), міжнародні конференції «Тараповские чтения - 2012», «Тараповские чтения - 2013» (м. Харків, 2012 р., 2013 р.), VI, VII Міжнародні наукові конференції «Обчислювальна та прикладна математика» ім. акад. І.І. Ляшка (м. Київ, 2013 р., 2014 р.), Міжнародна конференція «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2014» (м. Воронеж, 2014 р.), Міжнародний семінар «Численное моделирование методами дискретных особенностей в математической физике» (м. Харків, 2014 р.), XXIII Міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта» (м. Харків, 2015 р.), XVII Міжнародний симпозіум «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (м. Суми, 2015 р.), III International Conference "Analysis and Mathematical Physics" (м. Харків, 2015 р.).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 18 наукових робіт [1–18], з них 7 статей [1–7] у журналах (5 статей [1–3, 5, 7] у журналах, які включені до переліку наукових фахових видань України, у тому числі один журнал включено до міжнародних наукометричних баз даних; 2 статті [4, 6] у закордонних журналах, які включені до міжнародних і закордонних наукометричних баз даних), 1 стаття [14] у закордонному збірнику матеріалів міжнародної конференції і 10 тез доповідей, які опубліковані в матеріалах і збірниках праць наукових конференцій [8–13, 15–18].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з переліку умовних позначень, вступу, шести розділів із висновками, загального висновку, списку використаних джерел та додатку. Загальний обсяг роботи становить 188 сторінок, у тому числі перелік умовних позначень на 1 сторінці, 44 рисунка на 14 сторінках, список використаних джерел, що включає 121 найменування на 12 сторінках, і додаток на 2 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету і задачі дослідження, вказано об'єкт, предмет і методи дослідження, визначено наукову новизну і практичне значення одержаних результатів. Зазначено особистий внесок здобувача у спільних публікаціях, вказано, де відбувалась апробація результатів роботи.

У **першому розділі** надано огляд предметної галузі та наведено основні математичні моделі, у яких виникають диференціально-алгебраїчні рівняння.

Побудовано математичну модель перехідного процесу у радіотехнічному колі із зосередженими параметрами. Метод побудови математичної моделі розглядається на прикладі електричного кола чотирьохполюсного радіотехнічного фільтру, яке зображено на рис. 1. Задано вхідні струми I_1, I_2, лінійні опори r_1, r_2 і провідність g, індуктивність L, ємність C, нелінійні опори φ_1, φ_2 і провідності h_1, h_2.

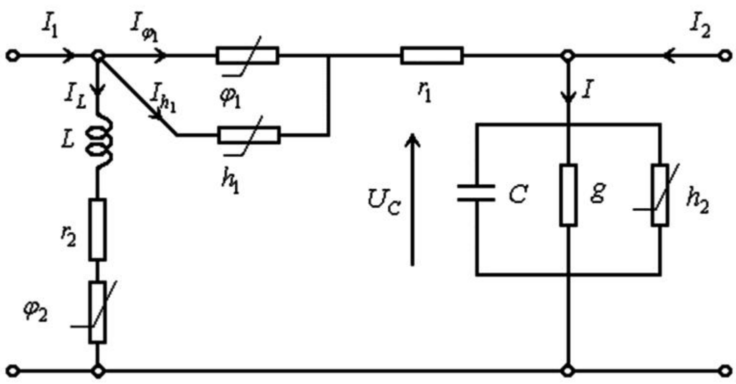

Рисунок 1 – Схема електричного кола чотирьохполюсника

З рівнянь, що характеризують зв'язки між струмами і напругами на елементах кола рис. 1, та законів Кірхгофа випливає наступна система рівнянь відносно змінних $x_1 = I_{\varphi_1}$, $x_2 = I_L$, $x_3 = U_C$:

$$L\dot{x}_2 - r_1 x_1 + r_2 x_2 - x_3 = \varphi_1(x_1) + r_1\gamma(x_1) - \varphi_2(x_2), \quad (1)$$
$$C\dot{x}_3 - x_1 + g x_3 = I_2(t) + \gamma(x_1) - h_2(x_3), \quad (2)$$
$$x_1 + x_2 = I_1(t) - \gamma(x_1), \quad (3)$$

де $\gamma(x_1) = h_1(\varphi_1(x_1))$. Векторна форма системи (1)–(3) відносно вектора стану $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ має вигляд напівлінійного диференціально-алгебраїчного рівняння $\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = f(t,x)$, де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -r_1 & r_2 & -1 \\ -1 & 0 & g \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ f(t,x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) + r_1\gamma(x_1) - \varphi_2(x_2) \\ I_2(t) + \gamma(x_1) - h_2(x_3) \\ I_1(t) - \gamma(x_1) \end{pmatrix}.$$

Класичною моделлю міжгалузевого балансу економіки є схема витрати-випуск, створена В. Леонтьєвим. Відкрита динамічна система рівнянь витрат-випуску має вигляд лінійного диференціально-алгебраїчного рівняння $A\dot{x}(t) + Bx(t) = f(t)$, де вектор $x \in \mathbb{R}^n$ визначає випуск валового продукту, вектор $f \in \mathbb{R}^n$ – кінцевий попит, $S = E - B = (s_{ij})$ – матриця коефіцієнтів потоків, де s_{ij} – кількість одиниць продукції галузі i, яка поглинена галуззю j для випуску одиниці своєї продукції, E – одинична матриця порядку n, $R = -A = (r_{ij})$ – матриця коефіцієнтів основних фондів, де r_{ij} – кількість одиниць продукції галузі i, яка необхідна для збільшення на одиницю випуску продукції галузі j. У випадку, коли скорочується виробництво деяких галузей або накопичені основні фонди можуть бути частково спожиті, матриця A є необоротною. Більшість математичних моделей, що відповідають реальним економічним процесам, є нелінійними, і в загальному випадку функція f може нелінійно залежати від x.

Систему диференціально-алгебраїчних рівнянь у теорії керування часто називають *дескрипторною* системою. Напівлінійна дескрипторна система зі сталими коефіцієнтами має вигляд $\begin{cases} W\dot{x} = Ax + Bu + f(t,x,u), \\ y = Cx + Du + g(t,x,u), \end{cases}$ де $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^l$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, $f(t,x,u) \in C(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m)$, $g(t,x,u) \in C(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^p)$, W, A, B, C, D – дійсні матриці розмірів відповідно $m \times n$, $m \times n$, $m \times l$, $p \times n$, $p \times l$. Вектор x задає стан системи, u – керування (вхід), y – вихід. Дескрипторна система є розв'язною на інтервалі I, якщо можна знайти допустиме керування $u(t)$ таке, що на I існує її розв'язок. Тому питання про глобальну розв'язність та стійкість диференціально-алгебраїчних рівнянь становлять інтерес для теорії керування.

При дослідженні динаміки керованих багатоланкових механізмів і інтелектуальних роботів виникає диференціально-алгебраїчне рівняння вигляду

$\frac{d^2}{dt^2}[\hat{A}(t)y]+\hat{B}(t)y=\hat{K}(t)u+\varphi(t)$, яке за допомогою зниження порядку зводиться до рівняння $\frac{d}{dt}[A(t)x]+B(t)x=K(t)u+f(t)$.

У **другому розділі** надано постановку задачі, здійснено аналіз сучасного стану проблеми глобальної розв'язності та стійкості диференціально-алгебраїчних рівнянь, розглянуто методи дослідження глобальної розв'язності звичайних диференціальних рівнянь, удосконалено метод продовження розв'язків, розглянуто метод спектральних проекторів типу Ріса, отримано спеціальну блокову структуру операторів сингулярного жмутка, доведено теорему про глобальну розв'язність звичайного напівлінійного диференціального рівняння.

У роботі досліджується задача Коші для напівлінійного диференціально-алгебраїчного рівняння (ДАР):

$$\frac{d}{dt}[Ax(t)]+Bx(t)=f(t,x), \tag{4}$$

$$x(t_0)=x_0 \quad (t_0\ge 0), \tag{5}$$

де $t\ge 0$, $x,\,x_0\in\mathbb{R}^n$, $f(t,x):[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ – неперервна функція, $A,B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ – лінійні оператори, яким відповідають $(m\times n)$-матриці A,B.

Функція $x(t)$ називається *розв'язком* задачі Коші (4), (5) на деякому інтервалі $[t_0,t_1)$, $t_1\le\infty$, якщо $x(t)\in C([t_0,t_1),\mathbb{R}^n)$, $Ax(t)\in C^1([t_0,t_1),\mathbb{R}^n)$, $x(t)$ задовольняє умову (5) і рівняння (4) на $[t_0,t_1)$.

Вплив лінійної частини рівняння (4) визначається властивостями характеристичного жмутка операторів $\lambda A+B$, де λ – комплексний параметр.

Нехай $r(A,B)=rg(\lambda A+B)$ – ранг жмутка $\lambda A+B$ (найбільший з порядків мінорів, що не рівні тотожно нулю). Жмуток $\lambda A+B$ називається *регулярним*, якщо $n=m=r(A,B)$, в інших випадках, тобто якщо $n\ne m$ або $n=m$ та $r(A,B)<n$, жмуток називається *сингулярним.*

У пункті 2.2.1 розглянуто класичні теореми про продовження розв'язку звичайного диференціального рівняння. У пункті 2.2.2 наведено теорему Уінтера, яка може бути використана для визначення інтервалів існування розв'язків деяких диференціальних рівнянь та, з урахуванням певного зауваження, для перевірки існування глобального розв'язку. У пункті 2.2.3 розглянуто результати щодо глобальної розв'язності збуреного звичайного диференціального рівняння $\dot{x}=f(t,x)+R(t,x)$ з використанням інтегральних нерівностей.

У пункті 2.2.4 викладено та розвинуто метод продовження розв'язків з використанням диференціальних нерівностей і функцій типу Ляпунова та Ла-Саля для звичайного диференціального рівняння

$$\dot{x}=f(t,x), \tag{6}$$

де $t\ge 0$, $x\in\mathbb{R}^n$ і функція $f(t,x)\in C([0,\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ має неперервну частинну похідну за змінною x на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$. Розв'язок $x(t)$ задачі Коші (6), (5) називається *необмежено продовжуваним*, якщо він може бути продовжений для усіх $t \ge t_0$, тобто на весь напівнескінченний інтервал $[t_0, \infty)$. Якщо розв’язок $x(t)$ має *скінчений час визначення,* тобто не може бути продовжений на всю піввісь $[t_0, \infty)$, то існує таке $c > t_0$, що $\lim\limits_{t \to c-0} \|x(t)\| = +\infty$. За означенням похідна функції V в силу системи

$$\dot{x} = f_T(t, x) \tag{7}$$

де $f_T(t,x) = \begin{cases} f(t,x), & 0 \le t \le T, \\ f(T,x), & t > T, \end{cases}$ $T > 0$ – довільний параметр, має вигляд $\dot{V}\big|_{(7)} = \dfrac{\partial V}{\partial t} + (\mathrm{grad} V, f_T(t,x)).$

Отримано узагальнення теореми Ла-Саля про необмежену продовжуваність розв’язків рівняння (6), яке ослаблює обмеження на нелінійну частину рівняння та є подальшим розвитком методу продовження розв’язків з використанням диференціальних нерівностей і функцій типу Ляпунова та Ла-Саля.

Лема 1. *Нехай існують функція* $K(t,v) \in C([0,\infty) \times (0,\infty), \mathbb{R})$ *і додатно визначена функція* $V(t,x) \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *такі, що:* $V(t,x) \to +\infty$ *при* $\|x\| \to +\infty$ *рівномірно за* t *на кожному скінченому інтервалі* $[a,b) \subset [0,\infty)$*; для будь-якого* $T > 0$ *знайдеться обмежена множина* $\Omega_T \in \mathbb{R}^n$*, яка містить початок координат, така, що* $\dot{V}\big|_{(7)} \le K(t, V(t,x))$ *для всіх* $x \in \Omega_T^c$*,* $t \ge 0$*; диференціальна нерівність* $\dot{v} \le K(t,v)$*,* $t \ge 0$*, не має жодного додатного розв’язка зі скінченим часом визначення. Тоді кожний розв’язок* $x(t)$ *рівняння* (6) *є необмежено продовжуваним.*

Проведено аналіз методів дослідження глобальної розв’язності звичайних диференціальних рівнянь, які розглянуто у пунктах 2.2.1–2.2.4, та зроблено висновок про те, що серед них найбільш ефективним для практичного застосування та впровадження в подальші дослідження ДАР є метод, який розглянуто та розвинуто у пункті 2.2.4.

У підрозділі 2.3 сформульовано і доведено теорему існування та єдиності глобального розв’язку задачі Коші для звичайного напівлінійного диференціального рівняння $\dot{x} = Sx + \Phi(t,x) + e(t)$ з початковою умовою (5), де $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, S – постійна дійсна матриця порядку n, $e(t)$ і $\Phi(t,x)$ – n-вимірні вектор-функції.

У підрозділі 2.4 розглянуто метод спектральних проекторів типу Ріса, який дозволяє привести ДАР до еквівалентної системи із суто диференціального й суто алгебраїчного рівнянь.

Нехай $A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – лінійні оператори, які можуть бути виродженими (необоротними), операторам A, B відповідають дійсні $(n \times n)$-матриці A, B, $\lambda A + B$ – регулярний *жмуток індексу* 1, тобто $\exists C_1, C_2 > 0 : \left\|(\lambda A + B)^{-1}\right\| \le C_1 \ \forall |\lambda| \ge C_2$. Тоді існують введені А.Г. Руткасом спектральні проектори типу Ріса $P_k : \mathbb{R}^n \to X_k$, $Q_k : \mathbb{R}^n \to Y_k$, $k = 1,2$, які породжують прямі розкладання $\mathbb{R}^n = X_1 \dot{+} X_2$, $\mathbb{R}^n = Y_1 \dot{+} Y_2$

такі, що звужені оператори $A_1 = A|_{X_1} : X_1 \to Y_1$, $B_2 = B|_{X_2} : X_2 \to Y_2$ мають обернені та оператор $A_2 = A|_{X_2} : X_2 \to Y_2$ є нульовим.

У методі спектральних проекторів типу Ріса використовується також оборотний оператор $G = AP_1 + BP_2 = Q_1A + Q_2B$, який було введено Л.А. Власенко.

У підрозділі 2.5 отримано блокову структуру операторів сингулярного жмутка, яка відповідає певним розкладанням просторів $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$.

Нехай $A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – лінійні оператори, яким відповідають $(m \times n)$-матриці A, B; $\lambda A + B$ – сингулярний жмуток рангу $r(A,B) = rg(\lambda A + B)$. Існують прямі розкладання просторів

$$\mathbb{R}^n = X_s \dot{+} X_r = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \dot{+} X_r, \; \mathbb{R}^m = Y_s \dot{+} Y_r = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} \dot{+} Y_r, \qquad (8)$$

відносно яких жмуток $\lambda A + B$ приймає блоковий вигляд $\begin{pmatrix} \lambda A_s + B_s & 0 \\ 0 & \lambda A_r + B_r \end{pmatrix}$, де $\lambda A_s + B_s$ – суто сингулярний жмуток (від нього неможливо відокремити регулярний блок), $\lambda A_r + B_r$ – регулярний жмуток. У загальному випадку оператори сингулярної компоненти мають блокову структуру

$$A_s = \begin{pmatrix} A_{gen} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_s = \begin{pmatrix} B_{gen} & B_{und} \\ B_{ov} & 0 \end{pmatrix} : X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \to Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}, \qquad (9)$$

де $A_{gen} \in L(X_{s_1}, Y_{s_1})$ має обернений оператор $A_{gen}^{-1} \in L(Y_{s_1}, X_{s_1})$. Блокова структура сингулярного жмутка $\lambda A_s + B_s$ має зв'язок з канонічною формою Кронекера. Введено проектори $S : \mathbb{R}^n \to X_s$, $F : \mathbb{R}^m \to Y_s$, $S_i : \mathbb{R}^n \to X_{s_i}$, $F_i : \mathbb{R}^m \to Y_{s_i}$, $i = 1,2$, $P : \mathbb{R}^n \to X_r$, $Q : \mathbb{R}^m \to Y_r$ на підпростори з розкладань (8), які дозволяють отримати компоненти блокової структури (9). Для побудови проекторів і відповідних підпросторів необхідно дослідити розв'язки рівнянь $(\lambda A + B)x = 0$, $(\lambda A^T + B^T)y = 0$. Загальну максимальну кількість $N = n + m - 2r(A,B)$ лінійно незалежних розв'язків цих рівнянь назвемо *дефектом жмутка* $\lambda A + B$.

Припускається, що регулярна компонента $\lambda A_r + B_r$ є жмутком індексу 1. Тоді існують дійсні проектори $P_k : \mathbb{R}^n \to X_k$, $Q_k : \mathbb{R}^m \to Y_k$, $k = 1,2$ (розширені спектральні проектори типу Ріса), прямі розкладання підпросторів $X_r = X_1 \dot{+} X_2$, $Y_r = Y_1 \dot{+} Y_2$ та оператори $A_1^{-1} \in L(Y_1, X_1)$, $B_2^{-1} \in L(Y_2, X_2)$.

Основні результати другого розділу опубліковані у роботах [1, 6, 9–11, 15].

У **третьому розділі** сформульовано і доведено теореми існування та єдиності глобального розв'язку задачі Коші для напівлінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь з регулярним і сингулярним характеристичними жмутками, у тому числі теореми, які враховують специфіку рівнянь.

Нехай X, Z – s-вимірні лінійні нормовані простори. Оператор-функція $\Phi(x) : D \to L(X, Z)$, $D \subset X$, називається *базисно оборотною* на опуклій оболонці

$conv\{u,v\}$ векторів $u,v\in D$, якщо для будь-якого набору векторів $\{\tilde{x}_k\}_{k=1}^s \subset conv\{u,v\}$ та деякого адитивного розкладання $\{\Theta_k\}_{k=1}^s$ одиниці E_Z оператор $\Lambda=\sum_{k=1}^{s}\Theta_k\Phi(\tilde{x}_k)\in L(X,Z)$ є оборотним: $\Lambda^{-1}\in L(Z,X)$.

Теорема 1. *Нехай функція* $f(t,x)\in C([0,\infty)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ *має неперервну частинну похідну* $\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)$ *усюди на* $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, *жмуток* $\lambda A+B$ *операторів* $A,B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *є регулярним жмутком індексу* 1. *Нехай виконана умова*

$$\forall\, t\ge 0\,\exists\, x\in\mathbb{R}^n:(t,x)\in L_0=\{(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n \mid Q_2[Bx-f(t,x)]=0\} \tag{10}$$

і для будь-яких $u_i\in X_2$ *таких, що* $(t,P_1x+u_i)\in L_0$, $i=1,2$, *оператор-функція*

$$\Phi(u)=\left[\frac{\partial}{\partial x}(Q_2 f(t,P_1x+u))-B\right]P_2 \tag{11}$$

($\Phi(u)\in C(X_2,L(X_2,Y_2))$) *є базисно оборотною на опуклій оболонці* $conv\{u_1,u_2\}$. *Нехай існує самоспряжений додатний оператор* $H\in L(X_1)$ *і для кожного* $T>0$ *знайдеться число* $R_T>0$ *такі, що*

$$(HP_1x,G^{-1}Q_1f(t,x))\le 0 \quad \forall (t,x)\in L_0: 0\le t\le T,\ \|P_1x\|\ge R_T. \tag{12}$$

Тоді для будь-якої початкової точки $(t_0,x_0)\in L_0$ *існує єдиний розв'язок* $x(t)$ *задачі Коші* (4), (5) *на* $[t_0,\infty)$.

Наслідок 1. *Припустимо, що проекція* Q_1f *допускає зображення* $Q_1f(t,x)=S_1(t)P_1x+\psi(t,x)+\Pi(x)e(t)$, *де* $S_1(t)\in C([0,\infty),L(X_1,Y_1))$, $\psi(t,x)\in C([0,\infty)\times\mathbb{R}^n,Y_1)$, *похідна* $\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x}$ *неперервна на* $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, *функція* $\Pi(x)\in C^1(\mathbb{R}^n,L(\mathbb{R}^n,Y_1))$ *така, що* $\exists r,C>0:\|\Pi(x)\|\le C\ \forall x:\|P_1x\|\ge r$, *та* $e(t)\in C([0,\infty),\mathbb{R}^n)$. *Тоді теорема* 1 *залишається вірною, якщо замість умови* (12) *виконано* $(HP_1x,G^{-1}\psi(t,x))\le 0$ *для всіх* $(t,x)\in L_0$ *таких, що* $0\le t\le T$, $\|P_1x\|\ge R_T$.

Доведено теорему існування та єдиності глобального розв'язку задачі Коші для ДАР $A\frac{d}{dt}x(t)+Bx(t)=f(t,x)$ з початковою умовою (5), яка має ті ж умови, що наслідок 1 при $S_1(t)\equiv 0$, $\Pi(x)=Q_1$, та додатково вимагає, щоб проекція $Q_2f(t,x)$ була неперервно диференційовна на $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$. На відміну від задачі Коші (4), (5), розв'язком цієї задачі буде функція $x(t)\in C^1([t_0,\infty),\mathbb{R}^n)$.

Зауваження 1. У випадку, коли ранг жмутка $\lambda A+B$ дорівнює $r(A,B)=m<n$, блокова структура (9) приймає вигляд: $A_s=(A_{gen}\ 0)$, $B_s=(B_{gen}\ B_{und})$, у (8) $Y_s=Y_{s_1}$ та $Y_{s_2}=\{0\}$, $F_1=F$, $F_2=0$. Якщо $r(A,B)=n<m$, блокова структура (9) приймає

вигляд: $A_s = \begin{pmatrix} A_{gen} \\ 0 \end{pmatrix}$, $B_s = \begin{pmatrix} B_{gen} \\ B_{ov} \end{pmatrix}$, у (8) $X_s = X_{s_1}$ та $X_{s_2} = \{0\}$, $S_1 = S$, $S_2 = 0$.

З урахуванням зауваження 1 представлена нижче загальна теорема існування та єдиності глобального розв'язку сингулярного (тобто з сингулярним характеристичним жмутком) напівлінійного диференціально-алгебраїчного рівняння (4) включає випадки, коли $r(A,B) = m < n$ (відповідна система рівнянь недовизначена) або $r(A,B) = n < m$ (відповідна система рівнянь перевизначена).

Теорема 2. *Нехай функція* $f(t,x) \in C([0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *має неперервну частинну похідну* $\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ *усюди на* $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, $\lambda A + B$ *– сингулярний жмуток операторів* $A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *і його регулярна компонента* $\lambda A_r + B_r$ *має индекс* 1. *Нехай виконана умова:* $\forall t \ge 0 \ \exists x \in \mathbb{R}^n : (t,x) \in L_0 = \{(t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^n \mid (F_2 + Q_2)[Bx - f(t,x)] = 0\}$, *і для будь-яких* $u_i \in X_2$ *таких, що* $(t, Sx + P_1 x + u_i) \in L_0$, $i = 1, 2$, *оператор-функція* $\Phi(u) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\big(Q_2 f(t, Sx + P_1 x + u)\big) - B\right] P_2$ *є базисно оборотною на опуклій оболонці* $conv\{u_1, u_2\}$ $(\Phi(u) \in C(X_2, L(X_2, Y_2)))$. *Нехай існують самоспряжені додатні оператори* $H_1 \in L(X_{s_1})$, $H_2 \in L(X_1)$ *і для кожного* $T > 0$ *знайдеться* $R_T > 0$ *такі, що* $(H_1 S_1 x, A_{gen}^{-1} F_1 f(t,x)) + (H_2 P_1 x, A_1^{-1} Q_1 f(t,x)) \le 0$ *для всіх* $(t,x) \in L_0$ *таких, що* $0 \le t \le T$, $\|(S_1 + P_1)x\| \ge R_T$. *Тоді для будь-якої початкової точки* $(t_0, x_0) \in L_0$ *існує розв'язок задачі Коші* (4), (5) *на* $[t_0, \infty)$, *причому, якщо* $r(A,B) = n < m$, *розв'язок буде єдиним.*

Отримано наслідок теореми 2, який враховує специфічну структуру проекцій $F_1 f$, $Q_1 f$ та аналогічно наслідку 1 допускає спрощення останньої умови теореми.

Основні результати третього розділу опубліковані у роботах [2, 4–6, 12, 13–16].

У **четвертому розділі** побудовано математичні моделі чотирьох типів нелінійних радіотехнічних фільтрів і знайдено фізичні обмеження, які забезпечують гладку детерміновану еволюцію станів на нескінченному інтервалі часу.

Розглянуто імпедансну задачу для чотирьохполюсника на рис. 1. Як показано у підрозділі 1.1, система (1)–(3), де $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \gamma(x_1) = h_1(\varphi_1(x_1)), h_2(x_3) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $I_1(t), I_2(t) \in C([0,\infty),\mathbb{R})$, L, C, r_1, r_2, g – дійсні додатні параметри, описує математичну модель перехідного процесу у електричному колі на рис. 1 та має векторну форму (4). Нехай для будь-якого $t \ge 0$ існують $z_1, v \in \mathbb{R}$ такі, що виконано

$$v = I_1(t) - \gamma(z_1 + v); \tag{13}$$

нехай для будь-яких $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, які задовольняють рівняння (13), виконана умова $\gamma'(z_1 + \tilde{v}) \ne -1$ при будь-яких $\tilde{v} \in conv\{v_1, v_2\}$, $z_1 \in \mathbb{R}$; для будь-якого $T > 0$ існує $R_T > 0$ таке, що $2|M\varphi_1(x_1)| - 2[\varphi_1(x_1)(\gamma(x_1) + x_1) - \varphi_2(x_2)x_2] - h_2(x_3)x_3 \le 0$ при всіх

$x \in \mathbb{R}^3$ таких, що $\sqrt{2x_2^2 + x_3^2} \geq R_T$. Тоді за наслідком 1 для кожної початкової точки $(t_0, x_0) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3$, яка задовольняє рівняння (3), існує єдиний розв’язок задачі Коші (4), (5) на $[t_0, \infty)$. Зокрема, ці умови виконані для функцій $\varphi_1(y) = \alpha_1 y^{2m-1}$, $\varphi_2(y) = \alpha_2 y^{2n-1}$, $h_2(y) = \alpha_3 y^{2r-1}$, $\gamma(y) = \alpha_4 y^{(2s-1)(2m-1)}$, $m, n, r, s \in \mathbb{N}$, $\alpha_k > 0$, $y \in \mathbb{R}$.

Розглянуто гібридну задачу для чотирьохполюсника другого типу з нелінійними параметрами φ_1, φ_2, φ_3, h, лінійними опорами r_1, r_2, r_3 і провідністю g, индуктивністю L, ємністю C і заданими вхідними струмом I_1 і напругою U_1.

Розглянуто модель нелінійного чотирьохполюсника третього типу (рис. 2) в умовах неповних даних: задано лише один вхідний параметр – струм I, тоді як для однозначного визначення внутрішнього стану електричного кола чотирьохполюсника необхідно знати два вхідних параметра.

Розглянуто обернену задачу для нелінійного двополюсника (рис. 3): перевірено, що за рахунок вибору вхідного струму $I = I(t)$ та відповідних початкових даних можна забезпечити еволюцію струму I_1 всередині двополюсника так, щоб він дорівнював наперед заданої функції $I_1 = I_1(t)$, $t_0 \leq t < \infty$.

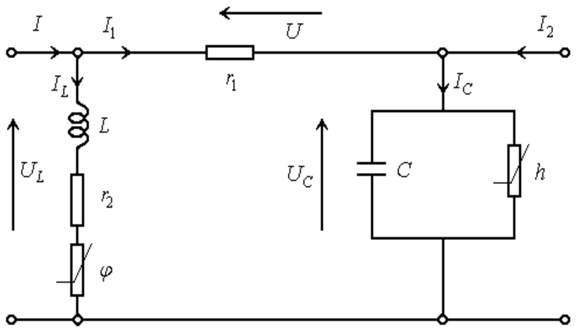

Рисунок 2 – Схема електричного кола

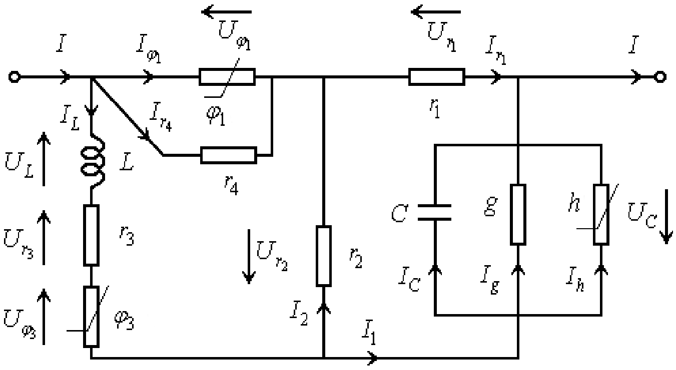

Рисунок 3 – Схема електричного кола

Для побудованих математичних моделей вказані обмеження, які забезпечують гладку детерміновану еволюцію станів на інтервалі $[t_0, \infty)$. Обмеження одержані в результаті застосування наслідків із теорем 1, 2. Вказаним обмеженням задовольняють певні нелінійні функції, які не є глобально ліпшицевими.

Основні результати четвертого розділу опубліковані у роботах [3, 4–6, 13–15].

У **п’ятому розділі** сформульовано і доведено теореми про стійкість та нестійкість за Лагранжем напівлінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь з регулярним і сингулярним характеристичними жмутками; отримані теоретичні результати застосовано для дослідження динаміки станів (перехідних процесів) у математичних моделях нелінійних радіотехнічних пристроїв.

Теорема 3. *Нехай функція* $f(t,x) \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *має неперервну частинну похідну* $\dfrac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ *усюди на* $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, $\lambda A + B$ *– регулярний жмуток індексу* 1. *Нехай виконано* (10) *і для будь-яких* $u_i \in X_2$ *таких, що* $(t, P_1 x + u_i) \in L_0$, $i = 1,2$, *оператор-функція* $\Phi(u)$ (11) *є базисно оборотною на опуклій оболонці* $conv\{u_1, u_2\}$.

Нехай для деякого самоспряженого додатного оператору $H \in L(X_1)$ *та числа* $R>0$ *існують функції* $k(t)\in C([0,\infty),\mathbb{R})$, $U(v)\in C((0,\infty),(0,\infty))$ *такі, що* $v=1/2(HP_1x,P_1x)$, $\int\limits_c^{+\infty}\frac{dv}{U(v)}=+\infty$ $(c>0)$ *і для будь-яких* $t\in[0,\infty)$, $\|P_1x\|\geq R$ *виконано* $(HP_1x, G^{-1}[-BP_1x+Q_1f(t,x)])\leq k(t)U(v)$. *Тоді для будь-якої початкової точки* $(t_0,x_0)\in L_0$ *існує єдиний розв'язок* $x(t)$ *задачі Коші* (4), (5) *на* $[t_0,\infty)$. *Якщо* $\int\limits_{t_0}^{+\infty}k(t)dt<+\infty$ *та існують числа* $C, M>0$ *такі, що для будь-яких* $t\in[0,\infty)$, $\|P_1x\|\leq M$ *виконано* $\|G^{-1}Q_2f(t,P_1x)\|\leq C$, *то рівняння* (4) *стійке за Лагранжем.*

Сформульовано і доведено теорему про нестійкість за Лагранжем рівняння (4) з регулярним характеристичним жмутком, яка дає достатні умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші (4), (5) зі скінченим часом визначення.

Аналогічні за суттю теореми доведено для напівлінійного диференціально-алгебраїчного рівняння (4) з сингулярним характеристичним жмутком.

Побудовано математичну модель динаміки певного радіотехнічного пристрою. Для цієї моделі та математичних моделей динаміки радіотехнічних фільтрів (рис. 1–3) вказано обмеження, які забезпечують гладку детерміновану еволюцію станів на нескінченному інтервалі часу (обмеження частково відрізняються від тих, що отримано за допомогою теорем існування та єдиності); вказано умови, за яких відповідні системи диференціально-алгебраїчних рівнянь стійкі за Лагранжем. Наведено конкретні функції та величини, що задають параметри електричних кіл та задовольняють отримані вимоги.

Для математичної моделі чотирьохполюсника (рис. 1) отримано наступні умови глобальної розв'язності та стійкості за Лагранжем. Нехай для будь-якого $t\geq 0$ існують $z_1, v\in\mathbb{R}$ такі, що виконано (13); для будь-яких $v_1, v_2\in\mathbb{R}$, які задовольняють рівняння (13), виконана умова $\gamma'(z_1+\tilde{v})\neq -1$ при будь-яких $\tilde{v}\in conv\{v_1,v_2\}$, $z_1\in\mathbb{R}$; для деякого $R>0$ існують функції $k(t)\in C([0,\infty),\mathbb{R})$, $U(v)\in C((0,\infty),(0,\infty))$ такі, що $v=Lx_2^2+Cx_3^2$, $\int\limits_c^{+\infty}\frac{dv}{U(v)}=+\infty$ і для будь-яких $t\in[0,\infty)$, $\sqrt{2x_2^2+x_3^2}\geq R$ виконано $-(r_1+r_2)x_2^2-gx_3^2-x_2\varphi_2(x_2)-x_3h_2(x_3)+x_2\varphi_1(x_1)+r_1x_2I_1(t)x_3I_2(t)\leq k(t)U(v)$. Тоді за теоремою 3 для кожної початкової точки $(t_0,x_0)\in\ \in[0,\infty)\times\mathbb{R}^3$, яка задовольняє (3), існує єдиний розв'язок задачі (4), (5) на $[t_0,\infty)$. Якщо $\int\limits_{t_0}^{+\infty}k(t)dt<+\infty$ та існують числа $C, M>0$ такі, що $\sup\limits_{t\in[0,\infty)}\max\limits_{|z_1|\leq M}|I_1(t)-\gamma(z_1)|\leq C$, то рівняння (4) стійке за Лагранжем.

Розглянуто декілька окремих випадків, серед яких:

$$\varphi_1(y)=\alpha_1y^3,\ \varphi_2(y)=\alpha_2y^3,\ h_2(y)=\alpha_3y^3,\ \gamma(y)=\alpha_4y^9,\ \ \alpha_k>0, \tag{14}$$

$$\varphi_1(y)=\alpha_1\sin y,\ \varphi_2(y)=\alpha_2\sin y,\ h_2(y)=\alpha_3\cos y,\ \gamma(y)=0.5\cos(\cos y),\ \ \alpha_k>0. \tag{15}$$

Для кожної початкової точки (t_0, x_0), яка задовольняє (3), і нелінійних параметрів (14) або (15) існує єдиний розв'язок задачі (4), (5) на $[t_0, \infty)$. Розв'язок буде обмеженим, якщо $\sup_{t\in[0,\infty)} |I_1(t)| < \infty$ та $\sup_{t\in[0,\infty)} |I_2(t)| < \infty$ або $\int_{t_0}^{+\infty} |I_2(t)| dt < +\infty$.

Основні результати п'ятого розділу опубліковані у роботах [6, 7, 17, 18].

У **шостому розділі** здійснено аналіз сучасного стану проблеми чисельного розв'язання диференціально-алгебраїчних рівнянь, розроблено чисельний метод знаходження розв'язків напівлінійного ДАР з регулярним характеристичним жмутком та проведено чисельний аналіз математичних моделей нелінійних радіотехнічних кіл.

На відрізку $[t_0, T]$ введено рівномірну сітку $\{t_i = t_0 + ih,\ i = 0,\ldots,N,\ t_N = T\}$ з кроком $h = (T - t_0)/N$. Позначемо через E одиничну матрицю порядку n та через $z = P_1 x$, $u = P_2 x$ проекції вектора $x = z + u \in \mathbb{R}^n$, де P_1, P_2 – спектральні проектори типу Ріса. Значення наближеного розв'язку задачі у вузлах t_i позначемо через $x_i = z_i + u_i$, $i = 0,\ldots,N$, де $z_i = P_1 x_i$, $u_i = P_2 x_i$. Оберемо початкові значення z_0, u_0 так, щоб виконувалась умова узгодження $u_0 = G^{-1} Q_2 f(t_0, z_0 + u_0)$, яка еквівалентна умові $(t_0, x_0) \in L_0$ теорем 1, 3. Запропоновано різницеву схему

$$x_0 = z_0 + u_0, \quad z_{i+1} = (E - hG^{-1}B) z_i + hG^{-1} Q_1 f(t_i, z_i + u_i),$$
$$u_{i+1} = \left[E - G^{-1} Q_2 \frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z_{i+1} + u_i) \right]^{-1} G^{-1} Q_2 \times \tag{16}$$
$$\times \left[f(t_{i+1}, z_{i+1} + u_i) - \frac{\partial}{\partial x} f(t_{i+1}, z_{i+1} + u_i) u_i \right], \quad x_{i+1} = z_{i+1} + u_{i+1}, \quad i = 0,\ldots,N-1,$$

яка апроксимує задачу (4), (5) з першим порядком відносно h. Доведено теорему про збіжність різницевої схеми (16). За допомогою розробленого методу отримано наближені розв'язки математичних моделей радіотехнічних пристроїв.

Для електричного кола на рис. 1 з лінійними параметрами $L = 0.5$ нГн, $C = 0.4$ пФ, $r_1 = 0.02$ Ом, $r_2 = 0.01$ Ом, $g = 0.2$ Ом$^{-1}$, нелінійними параметрами (14), де $\alpha_k = 1$, та зовнішніми струмами $I_1(t) = 3e^{-(t-22)^2/9}$, $I_2(t) = 2e^{-(t-22)^2/10}$ знайдено чисельний розв'язок системи (1)–(3) з початковими значеннями $t_0 = 0$, $x_0 = (0,\ 1.3235 \cdot 10^{-23},\ 0)^T$. Відповідні графіки представлено на рис. 4–6. На рис. 7–9 представлено графіки розв'язку для кола на рис. 1 з нелінійними параметрами (15), де $\alpha_k = 1$, та $I_1(t) = 50\sin(0.5t - 1.6)$, $I_2(t) = 50\sin t$, $t_0 = 0$, $x_0 = (0,\ -50.2488,\ 0)^T$.

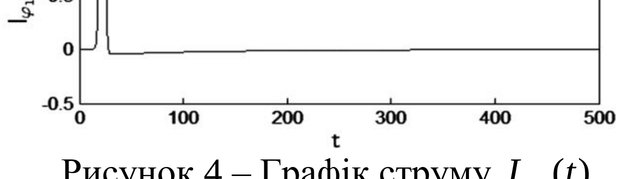

Рисунок 4 – Графік струму $I_{\varphi_1}(t)$

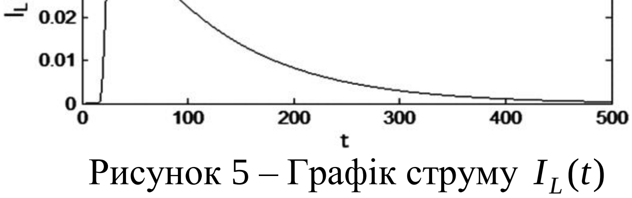

Рисунок 5 – Графік струму $I_L(t)$

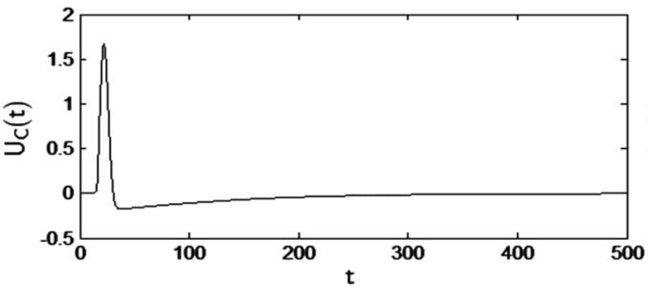

Рисунок 6 – Графік напруги $U_C(t)$

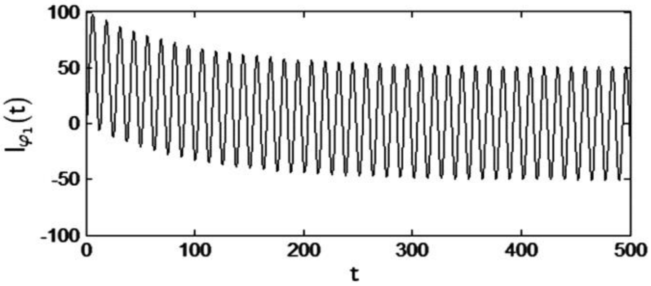

Рисунок 7 – Графік струму $I_{\varphi_1}(t)$

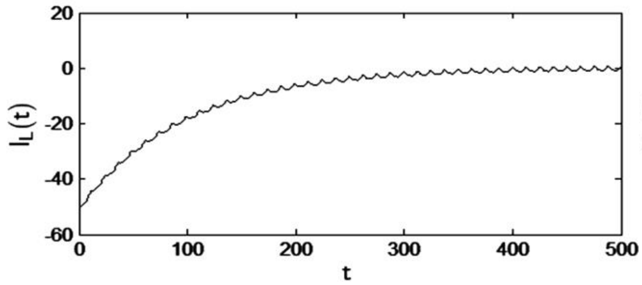

Рисунок 8 – Графік струму $I_L(t)$

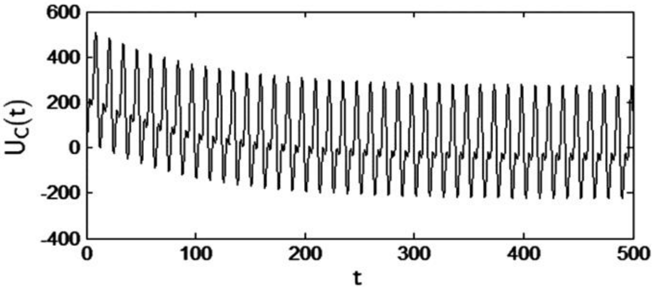

Рисунок 9 – Графік напруги $U_C(t)$

Графіки розв’язків, що представлені на рис. 4–9, є обмеженими на інтервалі часу від 0 до 500 пс. При збільшені інтервалу часу в 4–10 разів виконуються аналогічні обмеження. Аналіз розглянутих графіків показує, що для системи (1)–(3) з певними експоненціальними або синусоїдальними струмами, а також опорами і провідностями вигляду (14), (15), існують глобальні розв’язки, обмежені на всій області визначення, що підтверджує результати, отримані за допомогою теореми 3.

Основні результати шостого розділу опубліковані у роботах [7, 16, 17].

У **додатку** міститься акт впровадження результатів дисертації у навчальний процес Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

ВИСНОВКИ

У дисертації розв’язано наукову задачу, що полягає в отриманні нових умов глобальної розв’язності та стійкості напівлінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь, розробці методу їх чисельного розв’язання, а також у дослідженні глобальної динаміки нелінійних радіотехнічних кіл.

За результатами дисертаційної роботи зроблено наступні висновки.

1. Набув подальшого розвитку метод продовження розв’язків звичайного диференціального рівняння з використанням диференціальних нерівностей і функцій типу Ляпунова та Ла-Саля, що дозволяє отримувати умови необмеженої продовжуваності розв’язків при більш загальних припущеннях щодо нелінійної частини рівняння.

2. Запропоновано блокову структуру операторних коефіцієнтів сингулярних диференціально-алгебраїчних рівнянь та метод її побудови, які дозволяють звести вихідне рівняння до системи із суто диференціальних та суто алгебраїчних рівнянь.

3. Сформульовано і доведено теореми існування та єдиності глобального розв’язку задач Коші для звичайного напівлінійного диференціального рівняння та напівлінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь з регулярним і сингулярним характеристичними жмутками. Теореми не містять обмежень типу глобальної умови

Ліпшиця, що дозволяє застосовувати їх для дослідження більш широких класів прикладних задач, зокрема, для аналізу глобальної динаміки нелінійних радіотехнічних кіл та інших систем і процесів, при математичному моделюванні яких виникають напівлінійні диференціальні і диференціально-алгебраїчні рівняння.

Теорема існування та єдиності глобального розв'язку задачі Коші для диференціально-алгебраїчного рівняння з сингулярним жмутком довільного рангу включає випадки, коли відповідна система рівнянь є недовизначеною або перевизначеною. Зокрема, подібні системи виникають при дослідженні математичних моделей в умовах неповних даних і при розгляді обернених задач.

4. Отримано результати про глобальну розв'язність, які враховують специфіку нелінійних частин диференціально-алгебраїчних рівнянь, а саме, наявність доданків, які залежать тільки від часу, і лінійних нестаціонарних частин. Ці результати використовуються при аналізі перехідних процесів у нелінійних радіотехнічних колах і можуть бути застосовані до аналізу математичних моделей інших систем і процесів, у яких виникають диференціально-алгебраїчні рівняння.

5. Сформульовано і доведено теореми про стійкість та нестійкість за Лагранжем напівлінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь з регулярним і сингулярним характеристичними жмутками. Теореми дають достатні умови існування та єдиності глобального розв'язку, який є обмеженим на всій області визначення, та розв'язку, який має скінчений час визначення. Теореми можуть бути використані для аналізу еволюційних властивостей станів математичних моделей конкретних систем і процесів, які описуються відповідними рівняннями.

6. Побудовано математичні моделі п'яти типів нелінійних радіотехнічних пристроїв з зосередженими параметрами. Як і в методі електромеханічних аналогій, розроблені в дисертації математичні моделі можуть бути використані в аналізі робототехнічних, економічних та інших систем, у яких виділяються структурна геометрія у формі модельного графа та параметри складових елементів.

7. Для побудованих математичних моделей нелінійних радіотехнічних пристроїв вказані обмеження, які забезпечують гладку детерміновану еволюцію станів (перехідних режимів) на нескінченному інтервалі часу, і умови, за яких відповідні диференціально-алгебраїчні рівняння стійкі за Лагранжем. Вказаним обмеженням задовольняють певні нелінійні функції, які не є глобально ліпшицевими, що дозволяє гарантувати існування і обмеженість глобальних розв'язків рівнянь динаміки більш широких класів нелінійних систем.

Аналіз розглянутих задачах показує, що практична перевірка умов отриманих теорем є досить ефективною і ці умови можуть бути фізично забезпечені.

8. Розроблено чисельний метод знаходження розв'язків напівлінійного диференціально-алгебраїчного рівняння (з регулярним характеристичним жмутком) на будь-якому заданому відрізку часу. За допомогою розробленого методу отримано наближені розв'язки для математичних моделей нелінійних радіотехнічних кіл. Побудовано графіки наближених розв'язків, які демонструють еволюційні властивості розглянутих моделей.

Аналіз чисельних розв'язків підтверджує результати теоретичних досліджень.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Филипковская М. С. Продолжение решений полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений и приложения в нелинейной радиотехнике / М. С. Филипковская // Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2012. – № 1015, Вип. 19. – С. 306–319.

2. Руткас А. Г. Продолжение решений одного класса дифференциально-алгебраических уравнений / А. Г. Руткас, М. С. Филипковская // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2013. – № 1(111). – С. 135–145.

3. Руткас А. Г. Глобальная разрешимость дифференциально-алгебраических уравнений нелинейных электрических цепей / А. Г. Руткас, М. С. Филипковская // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2013. – № 4(114). – С. 120–131.

4. Филипковская М. С. Глобальная разрешимость недоопределенной сингулярной системы дифференциально-алгебраических уравнений / М. С. Филипковская // Вестник Воронежского государственного университета. Серия «Физика. Математика». – 2014. – № 3. – С. 168–181.

5. Филипковская М. С. Глобальная разрешимость переопределенной сингулярной системы дифференциально-алгебраических уравнений и приложения в радиотехнике / М. С. Филипковская // Радиоэлектроника и информатика. – 2014. – № 1(64). – С. 7–16.

6. Filipkovskaya M. Global solvability of singular semilinear differential equations and applications to nonlinear radio engineering / M. Filipkovskaya // Challenges of modern technology. – 2015. – Vol. 6, № 1. – P. 3–13.

7. Филипковская М. С. Устойчивость по Лагранжу и численный метод решения полулинейных дескрипторных уравнений / М. С. Филипковская // Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2015. – № 1156, Вип. 26. – С. 152-167.

8. Филипковская М. С. О продолжении решений полулинейного вырожденного уравнения / М. С. Филипковская // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: тезисы докл. междунар. конф., 17–22 апреля 2011 г. – Х., 2011. – С. 242–243.

9. Филипковская М. С. Глобальные решения полулинейного дифференциального уравнения / М. С. Филипковская // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: тезисы докл. VII науч. конф. студентов и аспирантов, 28 апреля 2012 г. – Х., 2012. – С. 42–43.

10. Филипковская М. С. Продолжение решений полулинейных

дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений / М. С. Филипковская // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: тезисы докл. междунар. конф. «Тараповские чтения - 2012», 1–31 мая 2012 г. – Х., 2012. – С. 118.

11. Филипковская М. С. О локальной разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений / М. С. Филипковская // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: тезисы докл. VIII междунар. науч. конф. для молодых ученых, 27–28 апреля 2013 г. – Х., 2013. – С. 101–102.

12. Руткас А. Г. Нахождение глобальных решений одного класса дифференциально-алгебраических уравнений / А. Г. Руткас, М. С. Филипковская // VI Міжнародна наукова конференція «Обчислювальна та прикладна математика» ім. академіка І. І. Ляшка: матеріали конф., 5–6 вересня 2013 р. – К.: КНУ ім. Тараса Шевченка, 2013. – С. 184.

13. Филипковская М. С. О глобальной разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений / М. С. Филипковская // Современные проблемы математики, механики и информатики: тезисы докл. междунар. школы-конф. «Тараповские чтения - 2013», 29 сент. – 4 окт. 2013 г. – Х., 2013. – С. 118–119.

14. Филипковская М. С. Об условиях глобальной разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений / М. С. Филипковская // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна - 2014». – Воронеж: Издат.-полиграф. центр «Научная книга», 2014. – С. 362–372.

15. Филипковская М. С. Глобальные решения сингулярных систем дифференциально-алгебраических уравнений / М. С. Филипковская // VII Міжнародна наукова конференція «Обчислювальна та прикладна математика» ім. академіка І. І. Ляшка: матеріали конф., 9–10 жовтня 2014 р. – К.: КНУ ім. Тараса Шевченка, 2014. – С. 106–107.

16. Filipkovskaya M. S. Obtaining global solutions of semilinear degenerate differential equations for nonlinear electric circuits / M. S. Filipkovskaya // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези доп. XXIII міжнар. наук.-практ. конф., Ч. IV, 20–22 травня 2015 р. – Х., 2015. – С. 88.

17. Филипковская М. С. Ограниченность глобальных решений полулинейных дескрипторных уравнений и их численный анализ / М. С. Филипковская // Труды XVII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2015), 8–13 июня 2015 г. – Харьков-Сумы, 2015. – С. 249–252.

18. Filipkovskaya M. The global solvability and the Lagrange stability of semilinear singular differential-algebraic equations / M. Filipkovskaya // III International Conference "Analysis and Mathematical Physics": Book of abstracts, June 15–19, 2015. – Kharkiv, 2015. – P. 20–21.

АНОТАЦІЯ

Філіпковська М.С. Глобальна розв'язність диференціально-алгебраїчних рівнянь та математичне моделювання динаміки нелінійних радіотехнічних кіл. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Харківський національний університет радіоелектроніки МОН України, Харків, 2015.

У дисертації отримано узагальнення теореми Ла-Саля про необмежену продовжуваність розв'язків диференціального рівняння. Запропоновано спеціальну блокову структуру операторних коефіцієнтів сингулярних рівнянь. Отримано теореми існування та єдиності глобального розв'язку звичайного напівлінійного диференціального рівняння та напівлінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь з регулярним і сингулярним характеристичними жмутками, у тому числі теореми, які враховують специфічні властивості рівнянь. Отримано теореми про стійкість та нестійкість за Лагранжем напівлінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь з регулярним і сингулярним характеристичними жмутками. Доведені теореми не містять обмежень типу глобальної умови Ліпшиця, що дозволяє отримувати умови глобальної розв'язності рівнянь динаміки для більш широких класів прикладних задач. Побудовано математичні моделі п'яти типів нелінійних радіотехнічних пристроїв. Для побудованих моделей вказано обмеження, які забезпечують гладку детерміновану еволюцію станів на нескінченному інтервалі часу, та умови, за яких відповідні диференціально-алгебраїчні рівняння стійкі за Лагранжем. Вказаним обмеженням задовольняють певні класи нелінійних функцій, які не є глобально ліпшицевими. Розроблено чисельний метод знаходження розв'язків напівлінійного диференціально-алгебраїчного рівняння на будь-якому заданому відрізку часу. За допомогою розробленого методу отримано наближені розв'язки для математичних моделей нелінійних радіотехнічних кіл. Отримані теоретичні результати допускають застосування до дослідження математичних моделей економічних, робототехнічних, механічних і керованих систем, у яких виникають подібні рівняння.

Ключові слова: диференціально-алгебраїчне рівняння, глобальний розв'язок, нелінійне електричне коло, стійкість за Лагранжем, перевизначена та недовизначена системи, чисельний метод.

АННОТАЦИЯ

Филипковская М.С. Глобальная разрешимость дифференциально-алгебраических уравнений и математическое моделирование динамики нелинейных радиотехнических цепей. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Харьковский национальный университет радиоэлектроники МОН Украины, Харьков, 2015.

Диссертационная работа посвящена получению условий существования, единственности и устойчивости глобальных решений полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений, нахождению их приближенных решений на любом заданном отрезке времени и анализу эволюционных свойств математических моделей динамики нелинейных радиотехнических цепей.

Получено обобщение теоремы Ла-Салля о неограниченной продолжаемости решений, ослабляющее ограничения на нелинейную часть дифференциального уравнения, что позволяет получать условия неограниченной продолжаемости решений при более общих предположениях относительно нелинейной функции. Предложена блочная структура операторных коэффициентов сингулярных полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений, которая позволяет привести исходное уравнение к эквивалентной системе из чисто дифференциальных и чисто алгебраических уравнений.

Получены теоремы существования и единственности глобального решения задачи Коши для обыкновенного полулинейного дифференциального уравнения $\dot{x} = Sx + \Phi(t,x) + e(t)$. Получены теоремы существования и единственности глобального решения для полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений вида $\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = f(t,x)$ с регулярным и сингулярным характеристическими пучками $\lambda A + B$ операторов (матриц) A, B. Теоремы не содержат ограничений типа глобального условия Липшица, что позволяет получать условия глобальной разрешимости уравнений динамики для более широких классов прикладных задач, в которых возникают нелинейные математические модели с соответствующими уравнениями. Получены теоремы о глобальной разрешимости, которые учитывают специфику нелинейной части дифференциально-алгебраического уравнения, а именно, наличие слагаемого, зависящего только от времени, и линейной нестационарной части. Теоремы используются при анализе переходных процессов в нелинейных радиотехнических цепях и могут быть применены для анализа других процессов и систем, в которых возникают математические модели с подобными уравнениями.

Получены теоремы, которые дают достаточные условия существования глобального решения недоопределенной системы и достаточные условия существования и единственности глобального решения переопределенной системы дифференциально-алгебраических уравнений. Теоремы могут быть применены для исследования эволюционных свойств математических моделей, которые возникают в радиотехнике, экономике, робототехнике при неполноте данных и при рассмотрении обратных задач.

Сформулированы и доказаны теоремы об устойчивости и неустойчивости по Лагранжу полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений с регулярным и сингулярным характеристическими пучками. Теоремы дают достаточные условия существования и единственности глобального решения, ограниченного на всей области определения, а также условия существования и единственности решения с конечным временем определения (решение определено на конечном интервале и неограниченно). Теоремы могут быть использованы для анализа эволюционных свойств решений математических моделей конкретных систем и процессов, которые описываются соответствующими уравнениями.

Построены математические модели пяти типов нелинейных радиотехнических устройств с сосредоточенными параметрами. Как и в методе электромеханических аналогий, разработанные в диссертации модели нелинейных радиотехнических цепей допускают использование в анализе робототехнических, экономических, механических и других систем, в которых выделяются структурная геометрия в форме модельного графа и соответствующие параметры составляющих элементов.

Для математических моделей нелинейных радиотехнических устройств указаны ограничения, которые обеспечивают гладкую детерминированную эволюцию состояний (переходных режимов) на бесконечном интервале времени, и условия, при которых соответствующие системы дифференциально-алгебраических уравнений устойчивы по Лагранжу. Приведены конкретные функции и величины, которые задают параметры электрических цепей (сопротивления, проводимости, заданные токи и напряжения) и удовлетворяют полученным требованиям. Указанные ограничения выполняются для определенных классов нелинейных функций, которые не являются глобально липшицевыми, что позволяет гарантировать существование и ограниченность глобальных решений уравнений динамики для более широкого класса нелинейных систем. Анализ рассмотренных задач показывает, что практическая проверка условий полученных теорем является достаточно эффективной и эти условия могут быть физически обеспечены.

Разработан численный метод нахождения решений полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений (с регулярным характеристическим пучком) на любом заданном отрезке времени. С помощью разработанного метода найдены приближенные решения для математических моделей нелинейных радиотехнических цепей. Построены графики приближенных решений, которые демонстрируют эволюционные свойства рассмотренных моделей. Анализ численных решений подтверждает результаты теоретических исследований.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраическое уравнение, глобальное решение, нелинейная электрическая цепь, устойчивость по Лагранжу, переопределенная и недоопределенная системы, численный метод.

ABSTRACT

Filipkovskaya M.S. Global solvability of differential-algebraic equations and mathematical modelling of the dynamics of nonlinear radio engineering circuits. – The manuscript.

Thesis for a candidate of physical and mathematical sciences on specialty 01.05.02 – mathematical modelling and computing methods. – Kharkiv National University of Radio Electronics MES of Ukraine, Kharkiv, 2015.

The generalization of La Salle theorem on the solutions of differential equations, which is defined in the future, is obtained in the thesis. The special block structure for the operator coefficients of singular equations is proposed. Theorems on the existence and the uniqueness of global solutions for an ordinary semilinear differential equation and semilinear differential-algebraic equations with regular and singular characteristic pencils, including theorems, which take into account the specificity of the equations, are obtained. Theorems on the Lagrange stability and instability of semilinear differential-algebraic equations with regular and singular characteristic pencils are obtained. The proven theorems contains no constraints of the global Lipschitz condition type. This allows to find the global solvability conditions of the dynamics equations for more general classes of applications. The mathematical models of the five types of nonlinear radio engineering devices are constructed. The restrictions which ensure the smooth determinate evolution of states on an infinite time interval and the conditions, under which the corresponding differential-algebraic equations are stable by Lagrange, are given for the constructed models. The certain classes of nonlinear functions to be not global Lipschitz satisfy the mentioned restrictions. The numerical method for finding the solutions of semilinear differential-algebraic equations on any given time interval are developed. The approximate solutions for the mathematical models of nonlinear radio engineering circuits are found using the developed method. The obtained theoretical results may be used to study mathematical models of economic, robotic, mechanical, and control systems, which contain such equations.

Keywords: differential-algebraic equation, global solution, nonlinear electric circuit, Lagrange stability, underdetermined and overdetermined systems, numerical method.