УДК519.21

РАЗЛИЧЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ С БЛИЗКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

ДИКАРЕВ В.А., ПОДГОРБУНСКИЙ Н.С.

Исследуются процессы, возникающие в неоднородных распределенных системах, описываемых уравнениями информационного канала, при распространении в нем разрывных и негладких импульсов (такими импульсами являются, например, прямоугольные и пилообразные импульсы). Приводятся формулы, которые позволяют различать импульсы в одномодовом канале.

1. Введение и постановка задачи

Рассматривается задача различения прямоугольных импульсов, распространяющихся в неоднородных информационных каналах. Предполагается, что фиксируемый на выходе канала импульс является реализацией одного из нескольких фиксированных импульсов, мало отличающихся друг о друга по своим характеристикам.

Эволюция единичного скачка напряжения на входе канала при его распространении по нему описывается выражением

$$\exp\{-i\omega[t_k + A(x)]\}\cdot[\xi_0(x)(i\omega)^{-1} + o(\omega^{-2})]. \quad (1)$$

Здесь

$$\xi_0(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x \frac{RC+GL}{\sqrt{CL}}d\tau\right\}\cdot\left(\begin{matrix}\sqrt[4]{\frac{L}{C}}\\ \sqrt[4]{\frac{C}{L}}\end{matrix}\right)\sqrt[4]{\frac{C(0)}{L(0)}},$$

$$A(x) = \int_0^x \sqrt{CL}d\tau. \quad (2)$$

Функции R, C, L и G задают, соответственно, распределения сопротивления, ёмкости, индуктивности и утечки основных характеристик информационного неоднородного канала. Аргументом этих функций является координата x. Первая компонента вектора $\xi_0(x)$ соответствует амплитуде напряжения импульса в точке x, а величина $A(x)$ равна времени распространения скачка напряжения от входа до точки x.

Целью исследования является определение эволюции скачков и изломов импульсов при их распространении в одномодовых информационных каналах.

Задача работы состоит в следующем. Получить формулы, позволяющие различать импульсы, распространяющиеся в одномодовом канале, путём сравнения характеристик скачков и изломов.

2. Задача различения импульсов при воздействии на канал случайных помех

Если на канал действуют случайные помехи, то время распространения импульсного скачка, т.е. задержка сигнала, меняется случайным образом. Рассмотрим ситуацию, когда случайные помехи представляют собой случайный белый шум.

Для стандартного белого шума $\Delta\eta$, связанного с интервалом (a,b), выполняются условия

$$M\Delta\eta = 0,\ D\Delta\eta = b - a. \quad (3)$$

Из [4] известно, что в этом случае случайная величина

$$\mu = \int_0^x \sqrt{CL}d\eta$$

имеет нормальное распределение. Её математическое ожидание $M\mu = 0$, а дисперсия равна

$$D\mu = \int_0^x (CL)d\tau\ .$$

Случайная величина μ определяет отклонение задержки импульсного скачка от своего расчётного значения.

Обозначим через T разность между ожидаемым и зафиксированным на выходе канала значением длительности прямоугольного импульса. Случайная величина T имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию

$$DT = 2\int_0^x (CL)d\tau\ .$$

Пусть на вход канала поступает прямоугольный импульс, принадлежащий одному из n типов. Длительности и амплитуды импульсов различных типов незначительно отличаются друг от друга. Обозначим через S_i гипотезу, которая заключается в том, что принятый импульс относится к i-му типу. Предполагается, что на выходе канала можно экспериментально определить длительность принятого импульса. Отклонение измеренной длительности импульса от длительности импульса i-го типа обозначим через T_i.

Распределение отклонения T_i имеет плотность

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot DT}}\cdot\exp\left(\frac{-T_i^2}{2DT}\right).$$

Вероятности гипотез S_i $(i=\overline{1,n})$ можно определить из соотношений

$$\frac{P(S_n)}{P(S_i)} = \exp\left(\frac{T_i^2 - T_n^2}{2DT}\right),\ (i=\overline{1,n-1})$$

$$p(S_1) + p(S_2) + ... + p(S_n) = 1.$$

Аналогично можно исследовать вопрос о различении прямоугольных импульсов по их амплитудам. В этом случае распределение случайных отклонений амплитуд принятых импульсов подчиняется логнормальному закону. Действительно, если

$$Z = -\frac{1}{2}\int_0^x \frac{RC+GL}{\sqrt{CL}} d\eta(\tau),$$

где $d\eta(\tau)$ – нормальный белый шум, то тогда Z имеет нормальное распределение.

Пусть нормальный белый шум имеет нулевое математическое ожидание, а его дисперсия равна

$$D\Delta\eta = \beta^2 (b-a),$$

Здесь β – некоторая константа, а $\Delta\eta$ – белый шум, соответствующий интервалу (a, b).

В этом случае случайная величина Z подчиняется нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$\sigma^2 = DZ = \frac{1}{4}\beta^2 \int_0^x \frac{(RC+GL)}{CL} d\tau .$$

Величина $Y = e^Z$, имеющая логнормальное распределение, представляет собой отклонение амплитуды импульса от ожидаемого значения.

Вероятности гипотез S_i $(i = \overline{1, n})$ определяется из следующих выражений

$$\frac{P(S_n)}{P(S_i)} = \frac{Y_n}{Y_i} \cdot \exp\left(\frac{\ln^2 Y_i - \ln^2 Y_n}{2\sigma^2}\right), \ (i = \overline{1, n-1}),$$

$$p(S_1) + p(S_2) + ... + p(S_n) = 1.$$

Здесь Y_j $(j = \overline{1, n})$ обозначают разности между зафиксированной амплитудой импульса и расчётной амплитудой импульса j-го типа.

Параметр β нормального белого шума определяется статистически. Для этого канал многократно зондируется единичными скачками напряжения, подаваемыми на вход канала. На выходе канала измеряются задержки распространения этих скачков. Затем вычисляются отклонения задержек от их расчётного значения. Эмпирическая дисперсия отклонений рассчитывается по формуле

$$D(\Delta\mu) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \Delta\mu_i^2 , \ \beta = \sqrt{\frac{D(\Delta\mu)}{\int_0^x (CL) d\tau}} .$$

Приведём численный пример, иллюстрирующий применение описанного правила.

Пусть функции изменения первичных параметров C и L имеют вид

$$C = C_0 e^{ax}, \ L = L_0 e^{bx},$$

$$C_0 = 30 \cdot 10^{-9} \ \text{ô}/\text{ì} , \ L_0 = 70 \cdot 10^{-5} \ \text{Ãí}/\text{ì} ,$$

$a = 0,04$, $b = 0,01$, параметр $\beta = 0,01$, $x = 4\text{ì}$.

Дисперсия отклонений задержки импульсов равна

$$D\mu = \beta^2 \int_0^4 (CL) d\tau = 45 \cdot 10^{-15} .$$

На вход канала могут поступать импульсы двух типов. Отклонения длительности зафиксированного импульса на выходе канала от длительностей импульсов первого и второго типов соответственно равны

$$T_1 = 9 \cdot 10^{-7} \text{с} \ \text{и} \ T_2 = 6 \cdot 10^{-7} \text{с} .$$

Для определения вероятностей гипотез S_1 и S_2 имеем следующие соотношения

$$\frac{P(S_2)}{P(S_1)} = \exp\left(\frac{T_1^2 - T_2^2}{2D\mu}\right) = 4,95 , \ p(S_1) + p(S_2) = 1.$$

Отсюда находим $P(S_2) = 0,83$, $P(S_1) = 0,17$.

3. Различения прямоугольных импульсов с учётом скин-эффекта

Рассмотрим теперь задачу различения прямоугольных импульсов на фоне помех в информационных каналах, для которых учитывается скин-эффект. В таких информационных каналах импульсный скачок напряжения на входе канала трансформируется на выходе в импульс с плавным нарастанием фронта. Происходит «выглаживание» скачка. Из [2] известно, что форма импульсного сигнала на выходе канала, соответствующего единичному скачку напряжения на входе, описывается выражением:

$$Y(x, t) = \eta(t - \mu(x)) \cdot [C_0(x)] \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta(x)}{2\sqrt{t - \mu(x)}}\right). \quad (4)$$

Здесь $\eta(t)$ – единичная функция. Множитель $C_0(x)$ определяет амплитуду импульсного сигнала.

Плавное нарастание фронта импульса от 0 до $C_0(x)$ описывается выражением

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{\beta(x)}{2\sqrt{t - \mu(x)}}\right).$$

Величина $\mu(x)$ представляет собой задержку сигнала (время распределения сигнала). Функция ошибок:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Для решения задачи различения сигналов и оценки их параметров мы располагаем экспериментальными данными: осциллограммами импульсных сигналов, полученных на выходе одномодового неоднородного информационного канала.

В силу действующих на канал случайных возмущений и ошибок формы наблюдаемых кривых будут отличаться от расчётных. Для того чтобы решить задачу различения и определить качество принятого решения, необходимо оценить значения параметров $C_0(x)$, $\mu(x)$, $\beta(x)$.

Оценку значений параметров сигналов проведём по методу наименьших квадратов.

Предположим, что на вход канала поступает прямоугольный импульс одного из n типов. Импульсы разных типов незначительно отличаются друг от друга по длительности. Определим вероятность гипотезы S_i, которая заключается в том, что принятый сигнал является сигналом i -го типа.

Значения напряжения, снятые с осциллограммы в моменты времени t_i, обозначим через u_i. Расчётные значения формы сигнала в моменты времени t_i обозначим через $H_i = Y(x, t_i)$.

Используя метод наименьших квадратов, находим такие значения параметров $C_0(x)$, $\mu(x)$ и $\beta(x)$, которые минимизируют квадратичную форму

$$Q = \sum_{i=1}^{n}(u_i - H_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(u_i - Y(x, t_i))^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(u_i - \eta(t - \mu(x)) \cdot C_0(x) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta(x)}{2\sqrt{t - \mu(x)}}\right)\right)^2.$$

Проведём переобозначение параметров $C_0(x)$, $\mu(x)$ и $\beta(x)$. Положим $C_0(x) = g_1$, $\mu(x) = g_2$ и $\beta(x) = g_3$. Значения параметров, минимизирующие квадратичную форму Q, должны удовлетворять соотношениям:

$$\frac{\partial Q}{\partial g_1} = 0, \ \frac{\partial Q}{\partial g_2} = 0, \ \frac{\partial Q}{\partial g_3} = 0.$$

Применив метод наименьших квадратов, получаем систему нормальных уравнений вида $AX = B$.

В данном случае A – матрица порядка 3×3. Её элементы равны

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} P_{ik} \cdot P_{jk}, \quad (i, j = \overline{1,3}).$$

Здесь $P_{ik} = \dfrac{\partial H_k}{\partial g_i}$, B – трёхмерный вектор, компоненты которого равны

$$B_i = \sum_{k=1}^{n} P_{ik}(u_k - H_k^0), \quad (i = \overline{1,3}).$$

Величины H_k^0 вычисляются по формуле (4) при подстановке в неё значений начальных приближений параметров g_1^0, g_2^0 и g_3^0. Начальные приближения g_1^0 и g_2^0 определяются по осциллограммам. Начальное приближение g_3^0 определяется при решении трансцендентного уравнения (5) относительно g_3^0:

$$u_k = \eta(t_k - g_2^0) g_1^0 \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{g_3^0}{2\sqrt{t_k - g_2^0}}\right). \qquad (5)$$

Вектор X содержит значения искомых поправок к параметрам g_i. Найдём выражение для

$$P_{1k} = \eta(t_k - g_2) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{g_3}{2\sqrt{t_k - g_2}}\right),$$

$$P_{2k} = -\eta(t_k - g_2) \cdot \frac{g_1 g_2}{2\sqrt{\pi}(t_k - g_2)} \cdot \exp\left\{-\frac{g_3^2}{4(t_k - g_2)}\right\},$$

$$P_{3k} = -\eta(t_k - g_2) \cdot \frac{g_1}{\sqrt{\pi(t_k - g_2)}} \cdot \exp\left\{-\frac{g_3^2}{4(t_k - g_2)}\right\}.$$

Решив систему нормальных уравнений, определим значения поправок и найдём оценки параметров

$$\tilde{g}_i = g_i^0 + x_i. \quad (i = \overline{1,3}).$$

Зная оценку задержки сигнала g_2, можно с большей точностью определить длительность τ измеренного импульса.

Предположим, что помехи в канале представляют собой нормальный белый шум с параметрами $(0, \alpha)$.

Тогда отклонения задержки фронта сигнала есть нормально распределённая случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$2\alpha^2 \int_0^x (CL) d\tau.$$

Обозначим отклонение длительности зафиксированного импульса от длительности импульса i -го типа через $\Delta\mu_i$. Вероятности гипотез $P(S_i)$ можно определить из следующей системы линейных уравнений:

$$\frac{P(S_i)}{P(S_n)} = \exp\left(\frac{(\Delta\mu_n)^2 - (\Delta\mu_i)^2}{2\sigma^2}\right), \ (i = \overline{1, n-1}),$$

$$P(S_1) + P(S_2) + ... + P(S_n) = 1,$$

где $\sigma^2 = 2\alpha \int_0^x (CL) d\tau$.

Приведём примеры численных расчётов.

На вход неоднородного одномодового канала подаются прямоугольные импульсы двух типов. Длительность импульсов первого типа равна $40 \cdot 10^{-6}$ с, а длительность импульсов второго типа – $41 \cdot 10^{-6}$ с. Длина канала равна 5ì . Неоднородность канала описывается выражением

$$Ï = Ï_0 \cdot e^{\alpha_Ï x}.$$

В качестве погонных параметров берётся сопротивление R, индуктивность L, ёмкость C, утечка G и параметр скин-эффекта D. $Ï_0$ – значение параметра в точке $x = 0$, $\alpha_Ï$ – некоторые константы.

Исходные численные данные равны

$$R_0 = 31{,}3 \text{ îì/ì}, \ C_0 = 22{,}8 \cdot 10^{-9} \text{ ô/ì},$$

$$L_0 = 69,4\,\text{Ãí}/\text{ì}\ ,\ D_0 = 9,9\,\text{îì}\ (\text{ñåê})^{1/2}/\text{ì}\ ,$$

$$G_0 = 10,1\cdot 10^{-6}\,\text{ñèì}/\text{ì}\ ,\ \alpha_R = -0,3\,,$$

$$\alpha_C = -0,02\,,\ \alpha_L = -0,2\,,$$

$$\alpha_D = 0,0099\,,\ \alpha_G = -0,9\cdot 10^{-2}\,.$$

Экспериментальные значения импульсного сигнала в моменты времени t_k, снятые с осциллограммы, приведены в таблице.

t, c	$275\cdot 10^{-4}$	$295\cdot 10^{-4}$	$305\cdot 10^{-4}$	$315\cdot 10^{-4}$
U, B	7,9	9,22	9,16	10,08
t, c	$325\cdot 10^{-4}$	$335\cdot 10^{-4}$	$355\cdot 10^{-4}$	$375\cdot 10^{-4}$
U, B	9,74	10,5	10,856	11,075
t, c	$395\cdot 10^{-4}$	$415\cdot 10^{-4}$	$435\cdot 10^{-4}$	$455\cdot 10^{-4}$
U, B	11,242	11,374	11,483	11,574
t, c	$475\cdot 10^{-4}$	$495\cdot 10^{-4}$	$515\cdot 10^{-4}$	$535\cdot 10^{-4}$
U, B	5,01	2,498	1,695	1,279
t, c	$555\cdot 10^{-4}$	$575\cdot 10^{-4}$	$595\cdot 10^{-4}$	$615\cdot 10^{-4}$
U, B	1,021	0,845	0,717	0,62

Оценки параметров для этих данных, полученные по методу наименьших квадратов, равны

$$\tilde{g}_1 = 0,1257\cdot 10^{2},\ \tilde{g}_2 = 0,2661\cdot 10^{-4},\ \ \tilde{g}_1 = 0,9505.$$

Измеренная длительность выходного импульса равна $40,3\cdot 10^{-6}\,\text{с}$.

В результате вычислений для вероятностей гипотез $P(S_1)$ и $P(S_2)$ получаем следующие соотношения:

$$\frac{P(S_1)}{P(S_2)} = 4,13\,,\ \ P(S_1) + P(S_2) = 1\,.$$

Отсюда находим $P(S_1) = 0,81$, $P(S_2) = 0,19$.

4. Заключение

Научная новизна состоит в следующем. Проведено исследование эволюции характеристик импульсов в неоднородных одномодовых системах. Рассмотрены задачи эволюции скачков импульсов и различения прямоугольных импульсов на фоне помех в информационных каналах, для которых учитывается скин-эффект.

Практическая ценность работы заключается в том, что получено решение задачи различения импульсов прямоугольной формы, распространяющихся в информационных каналах с распределёнными параметрами при учёте воздействия на канал случайных помех.

Литература: 1. *Агапова И.С., Дикарев В.А., Подгорбунский Н.С.* Эволюция скачков и изломов импульсов при их распространении в информационном канале // Радиоэлектроника и информатика. 2007. №1. С. 24-29. **2.** *Дикарев В.А., Мельников А.Ф.* Анализ высокочастотных сигналов в неоднородных линиях с учетом скин-эффекта // В кн. : Методы и средства преобразования сигналов. Тезисы докладов Всесоюзной конференции. Рига. 1976. С. 182-185. **3.** *Дикарев В.А.* Волны в многопроводных системах с распределенными параметрами // Радиотехника и электроника АН СССР. 1974. Т. XX, №12. С. 2618-2621. **4.** *Розанов Ю.А.* Случайные процессы. М.: Наука, 1979. 184 с.

Поступила в редколлегию 19.10.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Кривуля Г.Ф.

Дикарев Вадим Анатолиевич, д-р физ.-мат. наук, проф., каф. «Прикладной математики» ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей, случайные процессы. Адрес: Украина, 61164, Харьков, пр. Ленина, 66, кв. 21, тел. 343-57-03.

Подгорбунский Никита Сергеевич, аспирант кафедры «Прикладной математики» ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей, случайные процессы. Адрес: Украина, 61195, Харьков, ул. Метростроителей, 15, кв. 23, тел. 716-02-70