

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ НЕГАУССОВЫХ ПРОЦЕССОВ

ТИХОНОВ В.А., КУДРЯВЦЕВА Н.В.

Предлагаются выражения для параметрической оценки спектров присоединенной модели линейного предсказания. Рассматривается пример нахождения выборочной оценки спектра процесса, описываемого этой моделью.

1. Введение

При моделировании статистически связанного негауссова процесса существует противоречие между необходимостью учета негауссовых характеристик процесса для оптимальной обработки и сложностью его описания многомерными статистическими характеристиками. Поэтому необходимы модели негауссовых процессов, позволяющие синтезировать эффективные, достаточно простые устройства обработки и учитывающие статистики высших порядков. Классические модели авторегрессии (АР), скользящего среднего (СС) и авторегрессии-скользящего среднего (АРСС) определяются корреляционной функцией, которая не учитывает статистики высших порядков [1]. С помощью классических моделей линейного предсказания [2] полностью описываются только гауссовы процессы. Для учета же негауссовых свойств процессов рационально использовать также обобщенные модели линейного предсказания, параметры которых рассчитываются по кумулянтным или моментным функциям [3].

Для решения прикладных задач статистической радиотехники интерес представляют новые модели линейного предсказания, которые рассматривают процессы, состоящие из гауссовой и негауссовой составляющих [4]. Эти модели учитывают статистики второго и высших порядков. Они включают в себя классическую модель линейного предсказания второго ранга и обобщенную модель r -го ранга [5].

Целью исследования является разработка метода спектрального анализа присоединенных моделей линейного предсказания негауссовых процессов.

Задачи: вывод формул для параметрических оценок спектров присоединенных моделей, получение параметрических оценок спектров негауссовых процессов, разложение смеси процессов на составляющие.

В статье рассмотрен синтез присоединенной модели линейного предсказания на примере модели обобщенной авторегрессии $OAR_3 \times AP_2$. Получены параметрические спектральные оценки сгенерированного имитационного негауссова случайного процесса.

2. Присоединенная модель $OAR_3 \times AP_2$

Присоединенные обобщенные модели линейного предсказания применяются для описания негауссовых процессов, у которых спектры второго порядка отличаются от спектров высших порядков. При построении модели $OAR_3 \times AP_2$ вначале учитывается спектральная плотность мощности, которая может частично совпадать со спектрами высших порядков. Ошибка предсказания модели АР может содержать информацию о негауссовых составляющих процесса, не учтенных этой моделью. Для описания этих составляющих можно присоединить к модели АР обобщенную модель ОАР. В результате синтеза такой модели будут учтены все составляющие спектра второго и высших порядков негауссова процесса.

Если построение присоединенных моделей начать с обобщенных моделей, то можно выделить негауссовы, а затем гауссовы составляющие процесса. Такие модели также рационально использовать в случаях, когда негауссов процесс является аддитивной смесью гауссовых и негауссовых процессов.

Если в уравнении для обобщенной модели авторегрессии ошибку предсказания r -го ранга представить моделью $(r-1)$ -го ранга, то получим уравнение присоединенной модели $OAR_{r-1} \times \dots \times OAR_3 \times AP_2$:

$$x[t] = \sum_{i=1}^{p_{r-1}} \Phi_r[i]x[t-i] + \dots + \sum_{i=1}^{p_3} \Phi_3[i]a_4[t-i] + \sum_{i=1}^{p_2} \Phi_2[i]a_3[t-i] + a_2[t], \quad (1)$$

где $\Phi_n[i]$ – коэффициенты модели $OAR_{r-1} \times \dots \times OAR_3 \times AP_2$; $a_n[t]$ – ошибки предсказания модели; p_n – порядки модели.

Эту модель можно использовать, если негауссовы и гауссовы составляющие спектров процесса только узкополосные.

Критерии оптимальности модели $\hat{A}D_3 \times \hat{A}D_2$ сводятся к условию статистической независимости ошибок предсказания. Ошибки предсказания модели n -го ранга должны удовлетворять соотношению

$$E\{a_n[t] \dots a_n[t-j] \dots a_n[t-u]\} = 0, \quad j, k, \dots, u > 0.$$

Эти ошибки получают в результате обеления ошибок предсказания модели $(n-1)$ -го ранга с помощью линейного преобразования. Критерий оптимальности используется при получении уравнений для расчета параметров присоединенной модели линейного предсказания, а также для выбора порядков модели. Уравнения для нахождения параметров моделей представлены в [5].

В общем случае выражения для спектральных оценок имеют сложный вид. Поэтому ниже, на примере простой присоединенной модели $OAR_3 \times AP_2$, продемонстрирован способ получения параметрического спектрального оценивания на основе этих моделей.

3. Параметрические оценки спектров на основе присоединенной модели $OAR_3 \times AP_2$

Найдем выражения для параметрических спектров комбинированной модели $OAR_3 \times AP_2$. Уравнение (1) описывает формирующий фильтр с рациональной частотной характеристикой

$$H(\omega) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{p_3} \Phi_3[i]e^{-j\omega Ti} \sum_{k=0}^{p_2} \Phi_2[k]e^{-j\omega Tk}}, \quad (2)$$

на вход которого подается негауссов белый шум. Формирующий фильтр присоединенной модели состоит из соединенных каскадно комбинаций фильтров. Амплитудно-частотная характеристика линейной системы, состоящей из n каскадно соединенных фильтров, описана в [6]. Присоединенная модель $OAR_3 \times AP_2$ позволяет получить параметрические оценки спектра второго и третьего порядка моделируемого негауссова процесса.

Из (2), используя ОАР параметрическую оценку спектральной плотности [4] и параметрическую оценку спектра третьего порядка модели AP [3], запишем выражение для оценки спектра второго порядка комбинированной модели $OAR_3 \times AP_2$ в виде

$$P_2(\omega) = \frac{D_{a_2}}{\sum_{i=0}^{p_3} \Phi_3[i]e^{-j\omega Ti} \sum_{k=0}^{p_2} \Phi_2[k]e^{-j\omega Tk}}.$$

Спектральная плотность третьего порядка представляется параметрическим выражением

$$P_3(\omega_1, \omega_2) = \frac{m_{3a_2}}{\sum_{i=0}^{p_3} \Phi_3[i]e^{-j\omega_1 Ti} \sum_{i=0}^{p_3} \Phi_3[i]e^{-j\omega_2 Ti} \sum_{i=0}^{p_3} \Phi_3[i]e^{j\omega_1 Ti + j\omega_2 Ti}} \times$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{p_2} \Phi_2[k]e^{-j\omega_1 Tk} \sum_{k=0}^{p_2} \Phi_2[k]e^{-j\omega_2 Tk} \sum_{k=0}^{p_2} \Phi_2[k]e^{j\omega_1 Tk + j\omega_2 Tk}}{a}$$

ее нулевое сечение имеет вид

$$P_3(\omega) = m_{3a_2} K \left/ \left| \sum_{i=0}^{p_3} \Phi_3[i]e^{-j\omega Ti} \right|^2 \left| \sum_{k=0}^{p_2} \Phi_2[k]e^{-j\omega Tk} \right|^2 \right.,$$

$$K = 1 / \left(\sum_{i=0}^{p_3} \Phi_3[i] \sum_{k=0}^{p_2} \Phi_2[k] \right).$$

Спектральная плотность присоединенных комбинированных моделей линейного предсказания представляется произведением спектральных плотностей обобщенных или классических моделей линейного предсказания.

4. Синтез присоединенной модели $OAR_3 \times AP_2$

Методом статистического моделирования была синтезирована присоединенная модель $OAR_3 \times AP_2$ негауссова процесса. Для этого анализировалась смесь

с отношением 4/1 негауссова процесса ОАР с центральной частотой $f = 15$ и гауссова процесса AP с центральной частотой $f = 40$ при $T = 0,01$. По заданным параметрам спектра рассчитывались коэффициенты ОАР и AP. Коэффициенты асимметрии негауссовой и гауссовой составляющих равнялись $\gamma_1 = 2,33$ и $\gamma_1 = 0,14$ соответственно, а для смеси – $\gamma_1 = 1,60$.

Этапы построения модели $OAR_3 \times AP_2$ включали: оценку параметров модели ОАР по выборке смеси, нахождение ошибки предсказания модели ОАР $a_3[t]$, оценку параметров модели AP ошибки предсказания $a_3[t]$. На рис. 1 показана спектральная плотность мощности присоединенной модели, рассчитанной по формуле (2). Для полученной негауссовой смеси вначале построили модель ОАР(2) третьего ранга. Так как коэффициент асимметрии гауссовой составляющей смеси близок к нулю, то выборочные коэффициенты ОАР соответствуют негауссовой составляющей. Сечение выборочного спектра для модели ОАР(2) негауссовой составляющей процесса соответствует спектру негауссовой составляющей имитационного процесса.

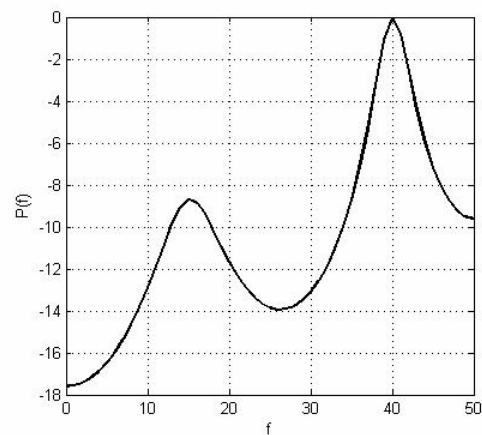


Рис. 1. Теоретическая спектральная плотность мощности смеси

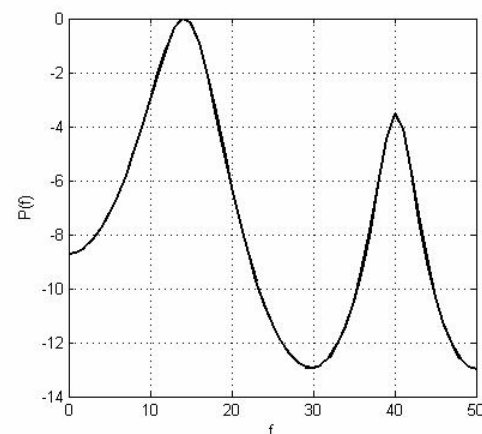


Рис. 2. Выборочная спектральная плотность процесса $OAR_3 \times AP_2$

Затем с помощью обеляющего фильтра была получена ошибка предсказания модели ОАР(2) третьего ранга. Для ошибки предсказания была построена классическая модель АР(4) второго ранга, спектр которой соответствует гауссовой составляющей полученного негауссова процесса. Небольшой пик вблизи частоты негауссовой составляющей процесса показывает, что обеляющий фильтр ее не полностью подавил.

Выборочные значения коэффициентов моделей ОАР(2) и АР(4) использовались для получения выборочного спектра присоединенной модели $ОАР_3 \times АР_2$, показанного рис. 2. Сравнение графиков, представленных на рис. 1 и 2, показывает, что они соответствуют спектрам негауссовой и гауссовой составляющих смеси. Отметим, что график на рис. 2 показывает не только спектральные характеристики смеси, но и указывает на негауссовы и гауссовы составляющие смеси. Отличие выборочных спектральных пиков от теоретических вызвано тем, что смесь не является истинным процессом $ОАР_3 \times АР_2$. Аддитивный гауссов процесс несколько смещает выборочные оценки коэффициентов ОАР негауссова процесса в виде смеси. Кроме этого, необходимо учитывать, что негауссова составляющая была мощнее в 4 раза гауссовой составляющей, что нашло отражение в форме выборочного спектра.

5. Заключение

Практическая значимость: предложенные модели могут быть полезны для моделирования негауссовых сигналов и помех, для выделения полезных сигналов на фоне помех и шумов, для спектрального анализа случайных процессов в присутствии помех и шумов, при решении различных задач линейного прогнозирования.

Научная новизна: впервые получены спектральные оценки присоединенных моделей линейного предска-

зания негауссовых процессов, полностью описывающихся одним разностным уравнением.

Спектральный анализ на базе данных оценок позволяет получить не только совместный спектр второго и высших порядков, но и определить гауссовы и негауссовы составляющие спектра. Использование модели позволяет достаточно точно разложить исходный процесс на составляющие, представленные моделями линейного предсказания. Таким образом, эта модель более адекватна этим классам реальных процессов, что расширяет возможности применения моделей и эффективность учета информации.

Литература: 1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов / Пер. с англ. М.: Мир, 1974. Вып. 1. 406 с. 2. Бриллинджер Д.Р. Временные ряды. Обработка данных и теория. М.: Мир, 1980. 536 с. 3. Тихонов В.А. Обобщенная модель авторегрессии негауссовых процессов // Радиотехника. 2003. №132. С. 78–82. 4. Тихонов В. А., Кудрявцева Н. В., Дзига А. Г. Обобщенная модель авторегрессии высших рангов ошибок предсказания // Радиотехника. 2008. №153. С. 10–14. 5. Тихонов В. А., Кудрявцева Н. В. Присоединенные комбинированные модели линейного предсказания-обобщенного линейного предсказания негауссовых процессов // Радиотехника. 2008. №154. С. 152–155. 6. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1985. 312 с.

Поступила в редколлегию 20.01.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Кравченко Н. И.

Тихонов Вячеслав Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, проф. каф. РЭС ХНУРЭ. Научные интересы: экономическая статистика, статистические модели, негауссовы процессы. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-15-87.

Кудрявцева Наталья Валериевна, стажер-исследователь каф. РЭС ХНУРЭ. Научные интересы: теория линейного предсказания, статистическая обработка сигналов, негауссовы процессы. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-15-87.