РАСЧЁТ РАЗМЕРНОСТИ РЕГУЛЯРНЫХ ФРАКТАЛОВ В МЕТРИЧЕСКОЙ ЗОНЕ

Чумак В.С.
Научный руководитель – старший преподаватель Онищенко А.А.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Науки,14, каф. Физики, тел. (057) 702-13-45)
e-mail: valeriia.chumak@nure.ua

One non-trivial example is the fractal dimension of a Koch snowflake. It has a topological dimension of 1, but it is by no means a rectifiable curve: the length of the curve between any two points on the Koch snowflake is infinite. No small piece of it is line-like, but rather it is composed of an infinite number of segments joined at different angles. The fractal dimension of a curve can be explained intuitively thinking of a fractal line as an object too detailed to be one-dimensional, but too simple to be two-dimensional.

Фрактальная структура образуется путем бесконечного повторения исходной формы во все уменьшающемся (или увеличивающемся) масштабе по определенному алгоритму. Одной из важнейших характеристик фракталов является фрактальная размерность. В рамках общей топологии дается несколько определений размерности, и из них нам интересны будут размерность Хаусдорфа-Безиковича и размерность Минковского.

В реальном мире мы редко имеем дело с идеализированными объектами, так что рассмотрим не совсем хороший геометрический объект, например кривую Коха:

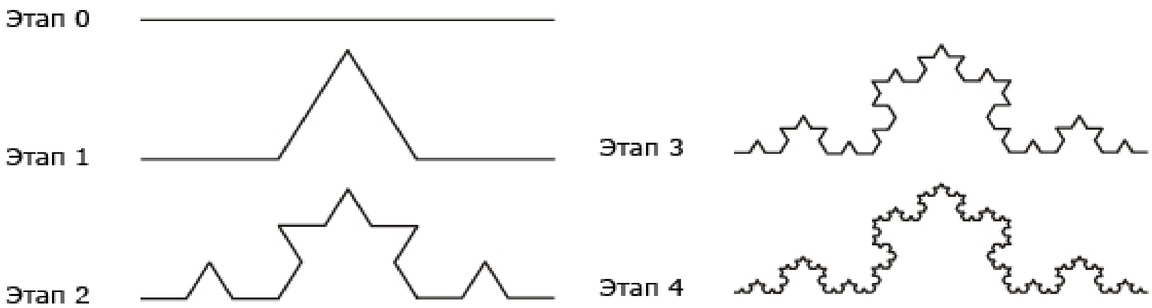

Рисунок 1.1

Рассмотрим как образуется фрактал, на нулевом шаге (итерации) кривая начинается с прямолинейного отрезка единичной длины $L(0) = 1$, $n = 0$. Каждый следующий шаг заменяется образующим элементом $n = 1$ кривую из четырёх прямолинейных звеньев, каждое длиной по 1/3. Длина всей кривой первой итерации составляет величину $L(1) = 4/3$ от начального. Следующее поколение $n = 2$: замена каждого прямолинейного звена уменьшенным образующим элементом. В результате: звеньев второго шага. $N = 4^2 = 16$, каждое длиной $\delta = 3^{-2} = 1/9$. Длина $L(2) = (4/3)^2 = 16/9$. И так далее.

Кривая n-го шага при любом конечном n называется предфракталом. Длина предфрактала n-гошага определяется как: $L(\delta) = 4/3^n$. Длина каждого звена составляется $\delta = 3^{-n}$. Замечая, что число итераций n представим в виде $n = -\ln(\delta)/\ln(3)$. Запишем длину предфрактала в виде:

$$L(\delta) = \frac{4}{3}^n = \exp\left(-\frac{\ln(\delta)[\ln 4/\ln 3]}{\ln(3)}\right) = \delta^{1-D}.$$

Используя аппарат определения фрактальной размерности получим, что размерность Хаусдорфа-Безиковича равна $D = ln4/ln3 \approx 1{,}26$.

Минковский предложил теорию с обобщением размерности для компактного множества $A \subset R^n$. Представим наглядно с помощью аппроксимации A объединением шаров и просуммированием их объемов или мер.

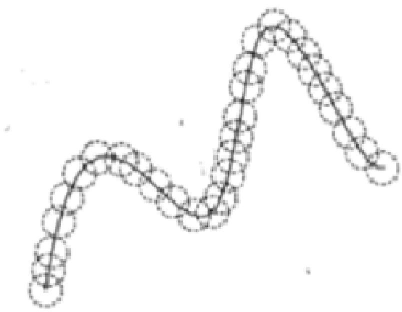

Рисунок 1.2

Допустим, $N(\varepsilon)$ – минимальное необходимое для покрытия множества A число шаров радиуса ε. Их суммарный объем V пропорционален $N(\varepsilon)\, \varepsilon\, D$. При $\varepsilon \to 0$, $N(\varepsilon) \to const \,/\, \varepsilon\, D$. Логарифмируем и получаем $ln\, N(\varepsilon) \to ln\, const - D\, ln(\varepsilon)$. Тогда: $ln\, const - ln\, N(\varepsilon)/ln\, \varepsilon \to D$. При $\varepsilon \to 0$ значение $ln(const)$ пренебрежимо мало по сравнению с $ln(N(\varepsilon))$. Получаем, что формула для определения размерности Минковского выглядит следующим образом:

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{-\ln \varepsilon}.$$

Формально: пусть n - шаг фрактала, на n-ом шаге у нас будет 4^n равных отрезков, длиной 3^{-n}. Возьмём за ε отрезок длиной 3^{-n}, тогда что бы покрыть всю кривую Коха нам понадобится 4^n отрезков. Для того, чтобы выполнялось условие $\varepsilon \to 0$, устремим $n \to \infty$. Получим:

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{ln\, N(\varepsilon)}{-ln\, \varepsilon} = \lim_{n \to \infty} \frac{ln\, 4^n}{-ln 3^{-n}} = \frac{ln\, 4}{\ln 3} = 1{,}2628.$$

Размерность Минковского во многих случаях совпадает с размерностью Хаусдорфа, однако так не всегда. Мнимальное значение размерности Минковского любого множества всегда больше либо равна его размерности Хаусдорфа.

Список литературы:

1. Р.М Кроновер. Фракталы и хаос в динамических системах. М.2000
2. Кононюк А. Е. К213 Дискретно-непрерывная математика. (Поверхности). — В 12-и кн. Кн.6. ч.2.— К.:Освіта України. 2016.—618 с.